ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანის შესახებ

სტუდენტი
ნოდარ ამბროლაძე

ხელმძღვანელი
ასოც. პროფესორი
ბეჟან ღვაბერიძე

თბილისი, 2015

ანოტაცია

განხილულია დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნის საკითხები. კერძოდ, დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა ამოხსნილია წრფივი ნახვევის მეთოდის გამოყენებით. იმავე ამოცანისათვის გამოკვლეულია ε _დათმობათა მეთოდით ამოხსნადობის საკითხი. ნაჩვენებია, რომ ამ მეთოდით მიღებული ამონახსნი ოპტიმალურია სლეიტერის აზრით. პარეტოს აზრით ოპტიმალური ამონახსნის მისაღებად საჭიროა დამატებით ამოიხსნას სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა ტოლობის ტიპის შეზღუდვით.

Abstract

Issues of solving some multicriteria assignment problem are presented. More precisely bicriteria assignment problem is solved using linear convolution. For the same problem ε-Constraint Method solvability is researched. It is shown, that solution with this method is Sleiter Optimal. To get Pareto Optimal solution, scalar optimization problem with equality constraints should be solved in addition.

სარჩევი

შესავალი.....4

§1. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის საწყისი ცნებები

1.1 მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა.....5

1.2 ოპტიმალური ამონახსნი პარეტოს აზრით (ეფექტურ ამონახნსთა სიმრავლე).....6

1.3 მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის თეორია.....8

1.4 მრავალკრიტერიალური ამოცანების ამოხსნის ძირითადი სქემების შესახებ.....8

§2. კომბინატორული ოპტიმიზაციის ამოცანები

2.1 ზოგადი ამოცანის ფორმულირება.....11

2.2 განმარტებები.....12

2.3 ცხადი სახით მოცემული კრიტერიალური სივრცე.....14

2.4 დანიშვნის ამოცანა.....15

2.5 დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა.....19

დასკვნა.....23

ლიტერატურა.....24

შესავალი

მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაცია წარმოადგენს მრავალკრიტერიუმიან გადაწყვეტილების მიღების ამოცანას, რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ საოპტიმიზირებელ ფუნქციას. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაცია გამოიყენება მეცნიერების მრავალ დარგში: ინჟინერიაში, ეკონომიკაში და ა.შ. სადაც უნდა იქნას მიღებული ოპტიმალური გადაწყვეტილება ორი ან მეტი კონფლიქტური მიზნის შემთხვევაში. მაგალითად, მანქანის ყიდვის დროს გვინდა გადავიხადოთ რაც შეიძლება ნაკლები თანხა, მაგრამ ამავდროულად იყოს მაქსიმალურად კომფორტული, ან გვინდა მაქსიმალურად სწრაფი მანქანის ყიდვა, რომელსაც ექნება მინიმალური წვა. პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად 2 ან მეტი მიზნის ოპტიმიზაციაა საჭირო.

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ერთი კრიტერიუმის შემთხვევაში ინტენსიურად მუშავდება ბოლო 60 წლის მანძილზე, თუმცა ამ მეთოდების შესწავლა ასახავს მათემატიკური პროგრამირების განვითარების საწყისი და შეიძლება ითქვას მარტივი ეტაპის პრობლემებს. სულ უფრო ნათელი ხდება, რომ ნებისმიერი სერიოზული რეალური ამოცანა ხასიათდება არა მხოლოდ ერთი კრიტერიუმით [1], ამიტომ მიუხედავად იმისა, რომ ერთკრიტერიუმიანი ამოცანების ამოხნის მეთოდები საკმაოდ კარგადაა შესწავლილი, საჭიროა არსებული თეორიული და პრაქტიკული შედეგები განვითარდეს იმ მიმართულებით, რომ მათი გამოყენება შესაძლებელი გახდეს მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანებისთვისაც.

მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანებს შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს დისკრეტულ ამოცანებს, ანუ ამოცანებს, რომელთა დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე დისკრეტულია (სასრულია), ასეთ ამოცანებს მიეკუთვნება უმოკლესი გზის, მინიმალური დამფარავი ხის, დანიშვნის, კომივოიაჟერის და ა.შ. ამოცანები.

რამდენიმე კრიტერიუმის გათვალისწინება არსებითად ცვლის ამოცანის ხასიათს სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანასთან შედარებით. განსხვავება პირველ რიგში გამოიხატება ვექტორული ფუნქციის მინიმუმის არაერთადერთობაში (მიღებული ტერმინოლოგიით პარეტო-ოპტიმალურის არაერთადერთობაში), რომელთა რიცხვი შეიძლება იყოს ძალიან დიდი.

მეორე განსაკუთრებულობა კი იმაში მდგომარეობს, რომ ხდება ამოცანის სირთულის პრინციპული ცვლილება ერთიდან მრავალ კრიტერიუმზე გადასვლისას. [4], [5] შრომებში ნაჩვენებია, რომ სკალარულ შემთხვევაში პოლინომიურად

ამოხსნადი ამოცანები როგორიცაა მინიმალური გზის, მინიმალური დამფარავი ხის და დანიშვნის ამოცანები გადაიქცევიან NP-რთულ ამოცანებად უკვე ორი კრიტერიუმის შემთხვევაშიც.

ნაშრომის მიზანია დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანისათვის ზოგიერთი თეორიული და პრაქტიკული საკითხის გამოკვლევა, კერძოდ :

1. ε-დათმობათა მეთოდით აგებული ამონახსნის სტრუქტურის გარკვევა
2. კრიტერიუმთა წრფივი ნახვევის მეთოდით მოძებნადი ეფექტური წერტილების ხვედრითი წილის გარკვევა
3. დანიშვნის ამოცანისთვის უნგრული მეთოდის რეალიზაცია
4. ცხადი სახით მოცემულ კრიტერიალური სივრცეში პარეტო ოპტიმალური ამონახსნების პოვნა მცირე განზომილებების შემთხვევაში.
5. დანიშვნის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი minmax ტიპის მიზნის ფუნქციისათვის.

§1. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის საწყისი ცნებები

1.1. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა

არატრივიალური მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანისთვის არ არსებობს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ერთდროულად ახდენს ყველა მიზნის ოპტიმიზაციას. მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგების სპეციალისტები ახალი მოწყობილობების დაგეგმარებისას ცდილობენ მიიღონ საუკეთესო საინჟინრო, კონსტრუქციული და საპროექტო გადაწყვეტილებები. საბანკო სფეროს წარმომადგენლები ოპტიმალურად ირჩევენ ობიექტებს ინვესტირებისათვის, ფირმებისა და საწარმოების ეკონომისტები კი ირჩევენ ოპტიმალურ ეკონომიკურ პოლიტიკას და ა.შ. შევეცადოთ გამოვყოთ ისეთი ზოგადი ელემენტები, რომლებიც დამახასიათებელია ასეთი ამოცანებისათვის.

პირველ რიგში განვსაზღვროთ სიმრავლე, რომლიდანაც შემდგომში განვახორციელებთ არჩევას. ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ X-ით და ვუწოდოთ **დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე**.

ჩვენი მთავარი ამოცანა წარმოადგენს დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლიდან რაღაც აზრით საუკეთესოს არჩევას, თუმცა ჩვენ ვნახავთ, რომ ეს შეიძლება არ იყოს ერთი ამონახსნი არამედ X-ის რაღაც ქვესიმრავლე, რომელსაც ვუწოდებთ **ამორჩეულ**

ამონახსნების სიმრავლეს ან გადაწყვეტილებების სიმრავლეს. ამორჩევა არატრივიალურ შემთხვევებში შეუძლებელია შესრულდეს იმ პირის გარეშე, რომელიც თავისი სუბიექტური მოსაზრებით განახორციელებს ამორჩევას და პასუხისმგებელი იქნება მის შედეგზე. მას **გადაწყვეტილების მიმღებ პირს** (მოკლედ **გმპ-**ს) ვუწოდებთ. ხშირად საოპტიმიზირებელ ფუნქციებს უწოდებენ ვექტორულ კრიტერიუმს, რომელიც შედგება რამდენიმე სკალარული ფუნქციისაგან :

$$z_1, z_2, \ldots z_m, m \geq 2, z_i : X \to R, i = 1, 2 \ldots . m.$$

ცხადია, რომ ვექტორული კრიტერიუმი $z = (z_1, z_2, \ldots z_m)$ ღებულობს მნიშვნელობებს R^m - m განზომილებიან ვექტორთა სივრცეში. ამ სივრცეს უწოდებენ **კრიტერიალურ სივრცეს ან შეფასებათა სივრცეს**.

1.2. ოპტიმალური ამონახსნი პარეტოს აზრით (ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე)

მკვლევარები შეისწავლიან მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანებს სხვადასხვა კუთხიდან და შესაბამისად არსებობს სხვადასხვანაირად დასმული ამოცანების სხვადასხვანაირი ალგორითმული გადაწყვეტები. ამოცანა შეიძლება დასმული იქნას ისე, რომ გვაინტერესებდეს პარეტო ოპტიმალური ამონახსნები, და/ან დათმობების რაოდენობა რათა დაკმაყოფილდეს სხვადასხვა მიზნები, და/ან ერთადერთი ამონახსნის პოვნა, რომელიც გმპ-ს სუბიექტური პრიორიტეტების მიხედვით იქნება ოპტიმალური.

უნდა აღინიშნოს, რომ ვექტორული კრიტერიუმით წარმოდგენილი "მიზნები" ხშირად წინააღმდეგობრივია და მათი მიღწევა ერთდროულად შეუძლებელია, ამიტომ ვექტორული კრიტერიუმის გარდა საჭიროა დამატებითი ინფორმაცია კომპრომისის განსახორციელებლად, ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, საჭიროა დამატებითი ინფორმაცია გმპ-ის პრიორიტეტების შესახებ. საჭიროა მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის დასმაში შევიტანოთ კიდევ ერთი ელემენტი, რომელიც აღწერს ამ პრიორიტეტებს (უპირატესობას). განვიხილოთ ორი დასაშვები x' და x'' ამონახსნი. ვთქვათ, გმპ ირჩევს (უპირატესობას ანიჭებს) პირველს. ამ შემთხვევაში წერენ

$$x' \succ x'',$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი დასაშვები x' და x'' ამონახსნისათვის შეიძლება არც $x' \succ x''$ და არც $x'' \succ x'$ თანაფარდობა არ შესრულდეს.

ვთქვათ, x' და x'' ორი ნებისმიერი დასაშვები ამონახსნია, მაშინ შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევიდან მხოლოდ ერთი:

1) სამართლიანია თანაფარდობა $x' \succ x''$,

2) სამართლიანია თანაფარდობა $x'' \succ x'$,

3) არ სრულდება არც 1) და არც 2).

1) შემთხვევაში ამბობენ, რომ x' დომინირებს x''-ზე,

2) შემთხვევაში x'' დომინირებს x'-ზე.

3) შემთხვევაში კი x' და x'' არ არიან სადარნი.

გადაწყვეტილება არის **არადომინირებადი** ან **პარეტო ოპტიმალური** თუკი არცერთი მიზნის ფუნქციის გაუმჯობესება აღარ შეიძლება სხვა მიზნის გაუარესების გარეშე. მიზნების პრიორიტეტების შესახებ დამატებითი მოცემულობის გარეშე ყველა პარეტო ოპტიმალური ამონახსნი მიიჩნევა როგორც ერთნაირად კარგი.

ფორმალურად მას შემდეგნაირად განვმარტავთ : $x^* \in X$ ამონახსნს ეწოდება **პარეტოს აზრით ოპტიმალური (პარეტო-ოპტიმალური),** თუ არ მოიძებნა ისეთი $x \in X$ დასაშვები ამონახსენი, რომ სამართლიანია უტოლობა $z(x) \leq z(x^*)$. პარეტოს აზრით ოპტიმალური ყველა ამონახსნი ქმნის პარეტოს სიმრავლეს, რომელსაც $P_z(X)$-ით აღნიშნავენ. ვთქვათ, x^* პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნია, ხოლო $z(x^*)$_მისი შესაბამისი პარეტო-ოპტიმალური ვექტორი, განმარტების ძალით თუ $x \in X$ დასაშვები ამონახსნისათვის, რომელიც განსხვავებულია x^* -სგან, შესრულებულია უტოლობა $z_i(x) < z_i(x^*)$, მაშინ უნდა მოიძებნოს ერთი მაინც ისეთი i, რომ $z_i(x^*) < z_i(x)$. სხვანაირად: პარეტო-ოპტიმალური ამონახსენი-ისეთი დასაშვები ამონახსნია, რომელიც არ შეიძლება გაუმჯობესდეს არც ერთი კრიტერიუმის მიმართ, სხვა კრიტერიუმის მიმართ გაუარესების გარეშე. ხშირად პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნებს ეფექტურ ამონახსნებსაც უწოდებენ. პარეტო-ოპტიმალური x^* ამონახსნისათვის $z(x^*)$ ვექტორს უწოდებენ პარეტოოპტიმალურ ვექტორს. ასეთი ვექტორების სიმრავლისათვის იყენებენ აღნიშვნას:

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{z(x^*) \in Y | x^* \in P_z(x)\}$$

სადაც $Y = z(X)$. ადვილი შესამჩნევია, რომ პარეტო-ოპტიმალური ვექტორების სიმრავლე შეიძლება ასეც განიმარტოს:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{არ არსებობს ისეთი } y \in Y \text{, რომ } y \leq y^*\}.$$

1.3. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის თეორია

მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის თეორია წარმოადგენს გადაწყვეტილებების მიღების მხარდამჭერი სისტემის აგების თეორიულ საფუძველს, მაშინ როცა ამონახსნის არჩევა ხდება მრავალი კრიტერიუმის საფუძველზე. როგორც აღვნიშნეთ ამონახსნი მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებში შეიძლება გაგებულ იქნას სხვადასხვანაირად. რადგანაც არადომინირებადი სიმრავლის ელემენტები მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის თეორიის თანახმად ტოლფასნი არიან, ამიტომ გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი სისტემის აგებისას მთავარი როლი ენიჭება გადაწყვეტილების მიმღებ პირს. (**გმპ**)

1.4. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების ამოხსნის ძირითადი სქემების შესახებ

ქვემოთ განვიხილავთ მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანების ამონახსნის აგების ორ ძირითად მიდგომას.

პირველი მიდგომა შემდეგში მდგომარეობს : ვეძებთ პარეტო-ოპტიმალურ ყველა ამონახსენს და შემდეგ **გმპ** მათგან ამოარჩევს ერთ კონკრეტულს. მიდგომა უნივერსალურია იმ აზრით, რომ **გმპ**_ის აქვს საშუალება აირჩიოს ნებისმიერი ამონახსნი, რადგან აქვს სრული ინფორმაცია არადომინირებადი ამონახსნების შესახებ. ამ მიდგომის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ამ სიმრავლის აგება რთულია და მაინც რომ ავაგოთ, მასში შეიძლება იყოს ელემენტთა ძალიან დიდი რაოდენობა. დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანისთვის სამართლიანია შემდეგი : არსებობს ისეთი კრიტერიუმები რომ პარეტო ოპტიმალური ამონახსნების სიმრავლე მთლიანად ემთხვევა ამოცანის შესაძლო შეფასებათა სიმრავლეს. ანუ პარეტო ოპტიმალურ ამონახსნთა რაოდენობაა n! მოვიყვანოთ ერთ-ერთი ასეთი მაგალითი :

ვთქვათ მოცემული გაქვს ორკრიტერიუმიანი დანიშვნის ამოცანა ვექტორული კრიტერიუმით $z = (z_1, z_2)$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{1} * x_{ij} \quad \rightarrow \min$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{2} * x_{ij} \quad \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1..n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1..n}$$

$$x_{ij} = \{0, 1\},\ i, j = \overline{1..n}$$

C^1 მატრიცის ელემენტებად ავიღოთ რიცხვები $C^1_{ij} = 2^{in+j-1}$, C^2 _ის ელემენტებად კი $C^1_{ij} = 2^{n^2} - C^1_{ij} :\ i, j = \overline{1..n}$

$$C^1_{n,n} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2^n & 2^{n+1} & \cdots & 2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n(n-1)} & 2^{n(n-1)+1} & \cdots & 2^{n^2-1} \end{pmatrix}$$

ნებისმიერ ამონახსნში ყოველი ელემენტი მაქსიმუმ ერთხელ შედის და მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის ორობითი ჩანაწერის n^2 ბიტში ზუსტად ერთ 1-იანს აფიქსირებს, ამიტომ ყოველ $n!$ დასაშვებ ამონახსნს f_1 ის განსხვავებული მნიშვნელობა შეესაბამება. რადგან:

$$z_1(x) + z_2(x) = 2^{n^2}\ (\text{const})$$

ცხადია ყოველი $x \in X$-ისთვის $z_2(x)$ იც სხვადასხვაა და რაც მეტია $z_1(x)$, მით ნაკლებია $z_2(x)$ და პირიქით. ამიტომ ყველა დასაშვები ამონახსნი იქნება 15 პარეტო ოპტიმალური. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადება. არსებობს დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა, რომელშიც

$$P|Y| = n!$$

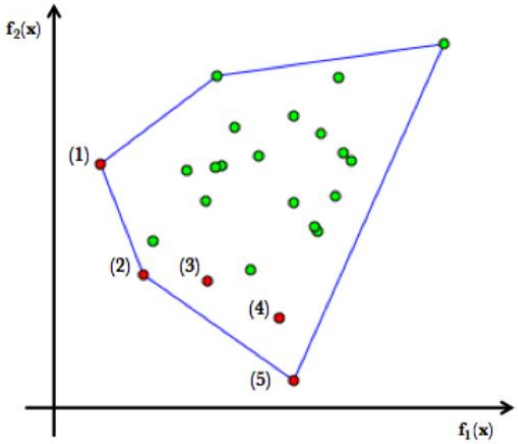
ადვილი საჩვენებელია, რომ ანალოგიური ფაქტი სამართლიანია $p \geq 3$ კრიტერიუმის შემთხვევაშიც.

მეორე მიდგომა ეყრდნობა კომპრომისის ამა თუ იმ სქემის გამოყენებას და მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის დაყვანას ერთი ან რამდენიმე ერთკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნაზე.

საკმაოდ გავრცელებული სქემა, რომელიც ამ მიდგომას მიეკუთვნება არის წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გამოყენება.

$$\{ \lambda z^1(x) + (1 - \lambda) z^2(x) : x \in X, 0 < \lambda < 1 \}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ ხერხით ნაპოვნი ამონახსნი პარეტო-ოპტიმალურია, მაგრამ საწინააღმდეგო ფაქტი საზოგადოდ არ არის სამართლიანი.(ყველა პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნი შეიძლება ვერ მოიძებნოს წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით)



მაგალითად ზემოთ მოცემულ ნახაზზე გვაქვს 5 პარეტოს წერტილი (1,2,3,4,5), აქედან წრფივი ნახვევის მეთოდი იპოვის მხოლოდ 3 მათგანს (1,2 და 5_ს), წერტილებს რომლებიც მდებარეობენ ამოზნექილ გარსზე. ხოლო დანარჩენი ორის პოვნა (3,4) წრფივი ნახვევის მეთოდით შეუძლებელია.

დათმობების (კომპრომისების) მეთოდის არსი შემდეგშია :

ვთქვათ z^1 არის წამყვანი (მთავარი) კრიტერიუმი. ვპოულობთ

$$z^1 \rightarrow \min, x \in X$$

სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამონახსნს. თუ ასეთი ბევრია, აღვნიშნოთ მათი სიმრავლე X_1-ით და ამოვხსნათ ამოცანა

$$z^2 \to \min, x \in X_1$$

და აღვნიშნოთ ეს ამონახსნი X^*_ით. ვთქვათ

$$(z^1(x^*),\ z^2(x^*)) = (a, b)$$

თუ ეს ამონახსნი აწყობს **გმპ**_ს , მაშნ ის ჩაითვლება ოპტიმალურ-კომპრომისულ ამონახსნად, წინააღმდეგ შემთხვევაში **გმპ** ადგენს ε_1 (ε_1>0) დათმობის სიდიდეს პირველი კრიტერიუმის მიმართ და იხსნება ამოცანა

$$z^2 \to \min$$

$$z^1 \leq\ a + \varepsilon_1, x \in X_1$$ დამატებითი პირობებით.

ვთქვათ, x^{**} არის ამ ამოცანის ამონახსნი და მას აქვს $(a_1,\ b_1)$ შეფასება, თუ ეს ამონახსნი მისაღებია **გმპ**_სთვის თუ არადა ის ნიშნავს ახალ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ დათმობას და.შ.

ნაჩვენებია, რომ ეპსილონ დათმობების მეთოდის შედეგად მიღებული ამონახსნი ოპტიმალურია სლეიდერის აზრით. მაგრამ შეიძლება არ იყოს ოპტიმალური პარეტოს აზრით. რადგან შესაბამის სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანას შეიძლება ჰქონდეს მრავალი ამონახსნი. პარეტოს ამონახსნის მისაღებად ამ ამოცანის შეზღუდვებს დაემატება ტოლობის ტიპის შეზღუდვა. და მიზნის ფუნქციას ვიღებთ ერთ-ერთ კრიტერიუმს და შეზღუდვებში მეორე კრიტერიუმს ვუტოლებთ იმ ამონახნს რომელიც იყო ოპტიმალური პასუხი პირველი კრიტერიუმის დათმობით მეორე კრიტერიუმის ოპტიმიზაციისას.

§2. კომბინატორული ოპტიმიზაციის ამოცანები

2.1. ზოგადი ამოცანის ფორმულირება

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ოპტიმიზაციის ამოცანებს შორის დიდ როლს თამაშობს დისკრეტული (სხვაგვარად კომბინატორული ოპტიმიზაციის) ამოცანები. მათი გადაჭრის პრობლემა უამრავ რეალურ სიტუაციაში წარმოიშობა. ერთის მხრივ, რადგან ამ ამოცანებში დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე სასრულია, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ მათი ამოხსნა რაღაც გაგებით უფრო იოლი უნდა იყოს, თუმცა რიგ შემთხვევებში ეს პირიქითაა. სანამ გადავიდოდეთ მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებზე, მოვიყვანოთ ერთკრიტერიუმიანი ამოცანის მაგალითები და მათ საფუძველზე რამდენიმე განმარტება.

ვთქვათ X არის ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სასრული სიმრავლე. გვაინტერესებს $z : X \to Z$ ფუნქციის მინიმიზაცია

$$\min_{x \in X} z(x).$$

კომბინატორული ოპტიმიზაციის ამოცანებს შორის გამორჩეული ადგილი უჭირავთ ბულის (0-1) პროგრამირების ამოცანებს, ამ შემთხვევაში ამოცანის ცვლადები მხოლოდ 0-ის ან 1-ის ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობენ, თუმცა ამით ამოცანა არ მარტივდება. შემდეგ პუნქტში განვიხილავთ დისკრეტული მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების ზოგიერთ თეორიულ საკითხს.

2.2. განმარტებები

დასაშვებ ამონასნს $x^* \in X$ ვუწოდებთ ეფექტურს, თუკი არ არსებობს რაიმე სხვა დასაშვები ამონახსნი $x \in X$ ისეთი რომ, $z^k(x) \leq z^k(x^*)$ $k = 1, 2$ (სადაც ერთ-ერთი მაინც მკაცრი უტოლობაა)

$z^k(x^*)$_ს ვუწოდებთ არადომინირებად წერტილს. (ხშირად არადომინირებად წერტილებს პარეტოს აზრით ოპტიმალურ წერტილებსაც უწოდებენ.)
ეფექტური წერტილების სიმრავლეს აღვნიშნავთ X_E თი, ხოლო X_E _ს ანასახს Z_ში Z_N_ით.

თუკი $x, x' \in X$ არიან ისეთები, რომ $z^k(x) \leq z^k(x')$ $k=1, 2$ და $z(x) \neq z(x')$ ვამბობთ, რომ x დომინირებს x'_ს ($z(x)$ დომინირებს $z(x')$_ს)

ეფექტური წერტილების სიმრავლე იყოფა ორ ქვესიმრავლედ:

- *დამხმარე* ეფექტური ამონახსნები წარმოადგენენ ოპტიმალურ ამონახსნებს შეწონილი ჯამის ერთკრიტერიუმიანი ამოცანის

$$\min\{ \lambda z^1(x) + (1 - \lambda) z^2(x) : x \in X, 0 < \lambda < 1 \}. \qquad (\textbf{\textit{დოა}}_\lambda)$$

  ყველა დამხმარე არადომინირებადი წერტილი მოთავსებულია Z ის ამოზნექილი გარსის (conv Z) ქვემო მარცხენა საზღვარზე. ანუ არადომინირებადი წერტილები $(\text{conv } Z) + R^2_+$. ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნებს X_{SE} და Z_{SN} შესაბამისად დამხმარე ეფექტური და არადომინირებადი წერტილების აღსანიშნავად.

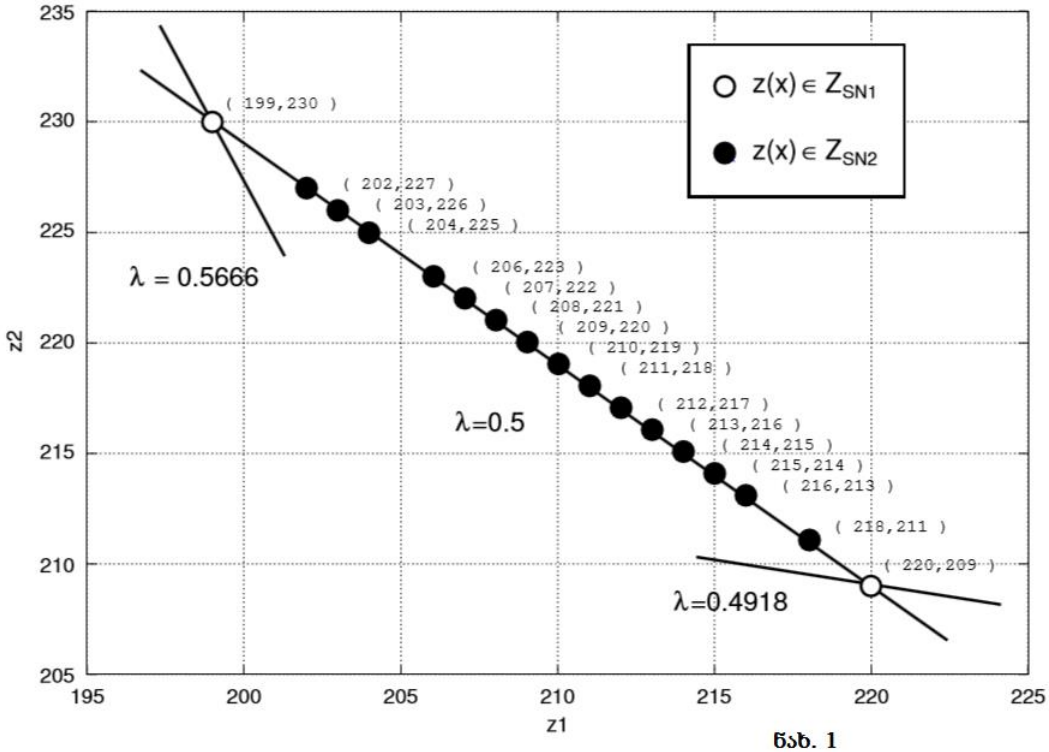
- *არადამხმარე* ეფექტური ამონახსნები არიან ეფექტური ამონახსნები რომლებიც არ არიან ($\textbf{\textit{დოა}}_\lambda$) _ს ამონახსნები არცერთი $0 < \lambda < 1$ _სთვის. არადამხმარე არადომინირებადი წერტილები არიან მოთავსებული Z ის ამოზნექილი გარსის შიგნით. ასეთი წერტილების საპოვნელად არანაირი თეორიული მახასიათებლები არ არსებობს რომლებიც მიგვიყვანდა ეფექტურ ალგორითმამდე მათ საპოვნელად. არადამხმარე ეფექტური ამონახსნების და არადომინირებადი წერტილების სიმრავლეებს აღვნიშნავთ შესაბამისად X_{NE} da Z_{NN} ით.

ჩვენ განვასხვავებთ დამხმარე ეფექტური ამონახსნების ორ კლასს:

- დამხმარე ეფექტური x ამონახსნები, რომლის მიზნის ვექტორი მოთავსებულია Z ის ამოზნექილი გარსის წვეროებზე. მათ ვუწოდებთ ექტრემალურ დამხმარე ეფექტურ ამონახსნებს, მათ ანასახებს კი ექსტრემალურ დამხმარე არადომინირებად წერტილებს და აღვნიშნავთ X_{SE1} და $Z_{SN1}=z(X_{SE1})$ _ებით შესაბამისად.

- სიმრავლე ისეთი $x \in X_{SE}$ წერტილებისა რომლისთვისაც $z(x)$ არ არის მოთავსებული Z ის ამოზნექილი გარსის წვეროზე. ამ სიმრავლეს აღვნიშნავთ X_{SE2} ხოლო მის ანასახს Z_{SN2} _ით.

ორივე სიმრავლე X_{SE1} და X_{SE2} შეიძლება მიღებული იქნას (***დოა***$_\lambda$)_ს ამოხსნით. თუმცა ამ უკანასკნელის (X_{SE2}) პოვნა ბევრად რთულია ვიდრე პირველის, რადგან ყველა ეფექტური x ამონახსნისთვის სადაც $z(x)$ არის Z_ის ამოზნექილი გარსის წიბოზე , წონითი ვექტორი λ რომლისთვისაც x მამინიმიზირებელია ერთიდაიგივეა. აქედან გამომდინარე X_{SE2} ის პოვნა მოითხოვს (***დოა***$_\lambda$)_ს *ყველა* ოპტიმალური ამონახსნის გადანომვრას. იხილეთ ნახ.1



ნახ. 1

(დოა)_ს შეზღუდვათა მატრიცის უნიმოდალურობის გამო შეიძლება გაგვიჩნდეს ვარაუდი, რომ დამხმარე ეფექტური ამონახსნები არ არსებობს. მაგრამ ეს მოსაზრება არასწორია. ამიტომ ორკრიტერიუმიანი დანიშვნის ამოცანა უნდა ჩაითვალოს მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანად. უფრო კონკრეტულად, სამართლიანია შემდეგი თეორემა :

თეორემა 1. დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა არის NP-სრული, #P-სრული და ძნელად დასამუშავებელი (intractable).

ძნელად დასამუშავებადი ნიშნავს რომ შეიძლება ამოცანას გააჩნდეს ექსპონენციალური რაოდენობის ეფექტური ამონახსნები.

2.3. ცხადი სახით მოცემული კრიტერიალური სივრცე

ვთქვათ მოცემული გვაქვს $Y = \{y^1, y^2 \ldots y^n\}$ ვექტორული შეფასების სიმრავლე $y^i \in Z^m$. მოვიყვანოთ პარეტოს სიმრავლის $P(Y)$-ის აგების რამდენიმე ალგორითმი:

Algorithm 1 პარეტოს სიმრავლის აგება

Require: $Y = \{y^1, y^2 \ldots y^n\}$
Ensure: $P(Y)$

```
procedure PARETO(Y)
    P(Y) ← ∅
    ყველა y^i მოუნიშნავია
    for i = 1 → n − 1 do
        for j = i + 1 → n do
            if y^i და y^j მონიშნული არაა then
                if y^i ≤ y^j then                ▷ შედარებას ჭირდება m ბიჯი
                    მოვნიშნოთ y^j               ▷ როგორც დომინირებული წერტილი
                end if
                if y^j < y^i then
                    მოვნიშნოთ y^i
                end if
            end if
        end for
    end for
    P(Y) ← ყველა მოუნიშნავი y^i
    return P(Y)
end procedure
```

მოცემული ალგორითმი ტრივიალურია და მისი სირთულე არის $O(n^2m)$.

თეორემა : (Kung et al. 1975) $m \in \{1, 2, 3\}$-სთის შეგვიძლია ავაგოთ ალგორითმი დროით $O(n \log n)$, $m \geq 3$ შემთხვევაში კი $O(n (\log n)^{m-2})$. პატარა m ებისთვის ასეთი სირთულე ეფექტურია, თუმცა რადგან ის ხარისხის მაჩვენებელშია დიდი m ებისათვის მისი გამოყენება აზრს კარგავს და უმჯობესია გამოვიყენოთ **Algorithm 1.** მოვიყვანოთ სწრაფი ალგორითმი $m = 2$ ისთვის.

ამ შემთხვევაში ფაქტიურად გვიწევს მხოლოდ სორტირება ამიტომ ამ ალგორითმის სირთულეა *O(n log n).*

Algorithm 2 პარეტოს სიმრავლის აგება $m = 2$ შემთხვევისთვის

Require: $Y = \{y^1, y^2 \dots y^n\}$ $y^i = (y_1^i, y_2^i) \in \mathbb{Z}^2$ $Y \neq \emptyset$
Ensure: $P(Y)$

```
procedure PARETO(Y)
    P(Y) ← y^1
    min2 ← y_2^1                    ▷ მიმდინარე მინიმალური მეორე კომპონენტი
    Sort(Y)                         ▷ დავალაგოთ ლექსიკოგრაფიულად
    for i = 2 → n do
        if y_2^i < min2 then
            min2 ← y_2^i
            P(Y) ← P(Y) ∨ y^i
        end if
    end for
    return P(Y)
end procedure
```

2.4. დანიშვნის ამოცანა

დანიშვნის ამოცანა არის ერთ-ერთი ფუნდამენტური კომბინატორული ოპტიმიზაციის ამოცანა. ის წარმოადგენს მინიმალური წონის მაქსიმალური შეწყვილების ამოცანას წონიან ორნაწილა გრაფში. ამოცანის ზოგადი ჩამოყალიბება შემდეგნაირია :

გვაქვს სამუშაოები და ამ სამუშაოთა შემსრულებელი პოტენციური კანდიდატები. ნებისმიერ კანდიდატს შეუძლია ნებისმიერ სამუშაოს შესრულება, რაშიც გადახდილ უნდა იქნას გარკვეული თანხა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ შესასრულებელ სამუშაოთა რაოდენობა კანდიდატთა რაოდენობას ემთხვევა. კანდიდატები ისე უნდა დავნიშნოთ შესასრულებელ სამუშაოებზე, რომ ჯამური დანახარჯი იყოს მინიმალური.

უნგრული ალგორითმი არის ერთ-ერთი მრავალთაგანი ალგორითმებიდან რომელიც წრფივი დანიშვნის ამოცანას ხსნის პოლინომიალურ დროში შემსრულებელი კანდიდატების რაოდენობის მიმართ. სხვა ალგორითმებში შედის სიმპლექს ალგორითმის მოდიფიკაცია.

დანიშვნის ამოცანა არის სატრანსპორტო ამოცანის კერძო შემთხვევა, რომელიც თავის მხრივ არის მინიმალური ღირებულების ნაკადის ამოცანის, ეს უკანასკნელი კი თავის მხრივ არის წრფივი პროგრამირების ამოცანის კერძო შემთხვევა. შესაძლებელია, რომ თითოეული ამათგანი ამოიხსნას სიმპლექს-ალგორითმით, თუმცა თითოეულ კერძო შემთხვევას აქვს უფრო ეფექტური ალგორითმები, რომლებშიც გამოყენებულია თითოეულის სპეციფიური სტრუქტურა.

დანიშვნის ამოცანის მათემატიკური მოდელი შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

მოცემულია ორი სიმრავლე A და T ერთიდაიგივე განზომილების ასევე წონითი ფუნქცია $C : A \times T \rightarrow R$. ვიპოვოთ ბიექცია $f : A \rightarrow T$ ისეთი, რომ ღირებულების ფუნქცია :

$$\sum_{a \in A} C(a,\ f(a))$$

იყოს მინიმალური.

ძირითადად წონითი ფუნქცია C არის წარმოდგენილი როგორც კვადრატული მატრიცა ნამდვილი მნიშვნელობებით.

ამოცანა არის წრფივი რადგან მიზნის ფუნქცია რომლის ოპტიმიზაციაც გვინდა და შეზღუდვები მოცემულია მხოლოდ წრფივი ფორმით.

ამოცანა შეიძლება გამოსახული იქნას როგორც სტანდარტული წრფივი პროგრამირების ამოცანად მიზნის ფუნქციით.

მივცეთ დანიშვნის ამოცანას მთელრიცხვა (ბულის) პროგრამირების ამოცანის სახე.

ვთქვათ C_{ij} არის i ური კანდიდატის მიერ j_ური სამუშაოს შესრულების ხარჯი. x_{ij} იყოს 1 ის ტოლი თუ i_ური კანდიდატი დაინიშნა j_ურ სამუაოზე, $(i=\overline{1..n}, j=\overline{1..n})$ მაშინ მიზნის ფუნქციას ექნება სახე.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min$$

ხოლო შეზღუდვებს :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1..n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1..n}$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}$$

პირველი შეზღუდვა უზრუნველყოფს რომ თითოეული მუშა დანიშნული იქნება ზუსტად ერთ სამუშაოზე, ხოლო მეორე შეზღუდვა კი უზრუნველყოფს, რომ თითოეული სამუშაო შესრულებული იქნეს ზუსტად 1 მუშის მიერ.

სხვაგვარად ორნაწილა დანიშვნის გრაფში ამოცანა შეგვიძლია მაქსიმალური წარმოვიდგინოთ შეწყვილების პოვნა, როგორც სადაც შეწონილ ჯამური წონა მინიმალურია. ამოცანის ამოსახსნელად 1955 წელს ამერიკელმა მათემატიკოსმა ჰაროლდ კუნმა შეიმუშავა ალგორითმი, რომელსაც მან იმის გამო, რომ ალგორითმი ეფუძვნებოდა ორი უნგრელი მათემატიკოსის შრომებს უნგრული მეთოდი უწოდა.

უნგრული მეთოდი ერთ-ერთი ყველაზე კარგად დამუშავებული ალგორითმია და ის პოლინომიალურ დროში მუშაობს. იდეა არის შემდეგნაირი:

1. ყოველ სვეტისა და სტრიქონის ყველა წევრს გამოვაკლოთ შესაბამისი სვეტი/სტრიქონის მინიმალური ელემენტი.
2. თუ მიღებულ მატრიცაში შესაძლებელია ავირჩიოთ n ცალი 0-იანი, (ყოველ სტრიქონში და სვეტში მხოლოდ ერთი) სწორედ ისინი შეესაბამებიან ამონახსნს) და დავასრულოთ ალგორითმი წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ 3_ზე.
3. ამ ბიჯზე მატრიცაში აუცილებლად არსებობს ერთი მაინც 0. ჩვენი ამოცანაა გავავლოთ მინიმალური რაოდენობის "ხაზები" სვეტებსა და სტრიქონებზე ისე, რომ ყველა 0 იანი დაიფაროს.

4. ვიპოვოთ მინიმალური ელემენტი გადაუხაზავ ელემენტებს შორის, გამოვაკლოთ ის მატრიცის ყოველ ელემენტს რომლებიც არ გადახაზულა და დავუმატოთ ისეთებს, რომლებიც ორჯერ გადაიხაზა. გადავიდეთ 2_ზე. მოვიყვანოთ ალგორითმის ფსევდოკოდი რომლის იმპლემენტაციაც გამოყენებული გვაქვს სადემონსტრაციო პროგრამაში. მისი სირთულეა $O(n^4)$. ალგორითმი იყენებს მაქსიმალურ შეწყვილებას ორნაწილა გრაფში. თავის მხრივ, ასეთი შეწყვილების იმპლემენტაცია $O(n^3)$ დროშია შესაძლებელი.

Algorithm 3 ალგორითმი პოულობს რა შეწყვილებით მიიღწევა მინიმალური დანახარჯი

Require: $C^{N,N}$, დანახარჯების მატრიცა

Ensure: $M = \{(v_i, u_j)\}$ ▷ i-ურ კანდიდატეს ვუთანადებთ j ურ სამუშაოს

```
procedure HUNGARIAN (C^{n,n})
    for i = 1 → n do
        mn ← min(C_{i,j}); j = 1, 2 ... n
        C_{i,j} ← C_{i,j} − mn; j = 1, 2 ... n
    end for
    for j = 1 → n do
        mn ← min(C_{i,j}); i = 1, 2 ... n
        C_{i,j} ← C_{i,j} − mn; i = 1, 2 ... n
    end for
    loop
        ავაგოთ ორნაწილა გრაფი G = (V, E), V = v_i ∨ u_j, E = {(v_i, u_j) | C_ij = 0}
        ვიპოვოთ მაქსიმალური შეწყვილება M = {(v_i, u_j)} .
        if sizeOf(M) == N then                    ▷ ყველა კანდიდატს მოეძებნა სამუშაო
            go to 48:
        end if
        Q_v ← ყველა v_i რომელიც არ შეწყვილდა                          ▷ M ში არაა
        Q_u ← ∅
        for all v_i ∈ Q do
            for j = 1 → n do
                if C_{i,j} == 0 and u_j ∉ Q_u then
                    Q_u = Q_u ∨ u_j
                    for k = 1 → n do
                        if (v_k, u_j) ∈ M and v_k ∉ Q_v then
                            Q_v = Q_v ∨ v_k
                        end if
                    end for
                end if
            end for
        end for
        for i = 1 → n do
            for j = 1 → n do
                if v_i ∈ Q_v and u_j ∉ Q_u then
                    mn ← min(mn, C_{i,j})
                end if
            end for
        end for
        for i = 1 → n do
            for j = 1 → n do
                if v_i ∈ Q_v and u_j ∉ Q_u then
                    C_{i,j} ← C_{i,j} − mn
                end if
                if v_i ∉ Q_v and u_j ∈ Q_u then
                    C_{i,j} ← C_{i,j} + mn
                end if
            end for
        end for
    end loop
    return M
end procedure
```

2.5. დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა

დანიშვნის ერთკრიტერიუმიანი ამოცანა არის მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანა რომელიც შესაძლებელია ამოიხსნას წრფივი პროგრამირებით შეზღუდვათა მატრიცის უნიმუდალურობის გამო. არსებობს ეფექტური ალგორითმები ამ ამოცანის ამოსახსნელად, მაგალითად, უნგრული მეთოდი.

ამ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ დანიშვნის ორკრიტერიუმიან ამოცანას (**დოა**) კრიტერიუმით. ეს შეიძლება ფორმულირებული იქნას შემდეგნაირად :

$$\min z^k(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^k * x_{ij} \quad k = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1..n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1..n}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i,j = \overline{1..n}$$

სადაც სადაც ყველა მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტი C_{ij}^k არის არაუარყოფითი მთელი რიცხვი და $x = (x_{11}, \ldots, x_{nn})$არის დანიშვნის მატრიცა. სიმარტივისთვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} * x_{ij} \equiv C(x)$$

X-ით აღვნიშნოთ **(დოა)**_ის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე.

$$X \subset \{0,1\}^{n^2} \subset R^{n^2}\text{_ს}$$

ვუწოდებთ გადაწყვეტილების სიმრავლეს (decision space), ხოლო

$$Z = \{z(x) : x \in X\} \subset N^2 \subset R^2\text{_ს}$$

კრიტერიალურ სივრცეს. Z-ს ასევე ვუწოდებთ დასაშვებ სიმრავლეს კრიტერიალურ სივრცეში.

განვიხილით დანიშვნის ამოცანა შემდეგი მონაცემებისთვის :

გვაქვს შემდეგი ღირებულებების მატრიცები :

1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5

11	5	10	2
3	12	4	9
1	3	6	4
2	8	7	8

სულ გვაქვს 4! = 24 დანიშვნა, შესაბამისად ორი კრიტერიუმით მიღებული 24 წყვილი.

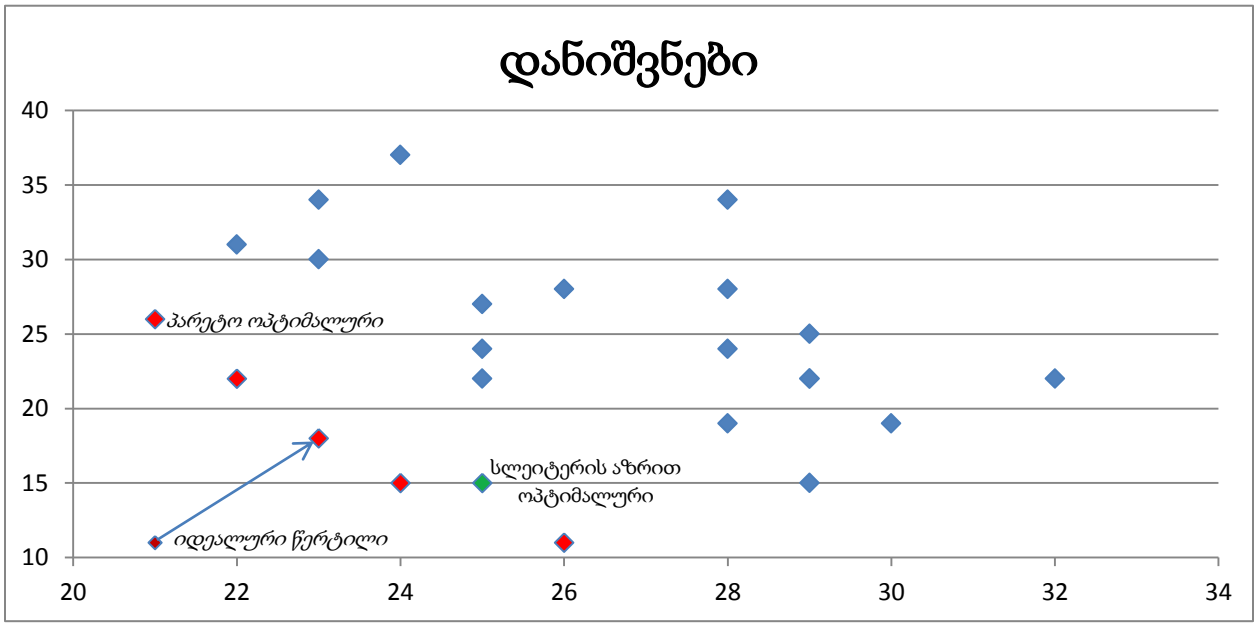
(21, 26), (22, 22), (22, 31), (23, 18), (23, 30), (23, 34),
(24, 15), (24, 37), (25, 15), (25, 22), (25, 24), (25, 27),
(26, 11), (26, 28), (28, 19), (28, 24), (28, 28), (28, 34),
(29, 15), (29, 22), (29, 22), (29, 25), (30, 19), (32, 22).

აქედან გვაქვს 5 პარეტოს წერტილი.

(21, 26), (22,22), (23, 18), (24, 15), (26, 11).

ასევე არსებობს ერთი (წარმოსახვითი) იდეალური წერტილი[3], რომელიც ორივე კრიტერიუმისთვის ცალ-ცალკე ოპტიმალური გადაწვეტილებით მიიღება. ეს წერტილია (21,11)

იდეალურ წერტილთან ევკლიდური მანძილით უახლოესი წერტილი წარმოადგენს პარეტოს ერთ-ერთ ამონახნსს. ეს წერტილი ამ შემთხვევაშ არის (23, 18)



თუკი კომპრომისების მეთოდით შევეცდებით მეორე კრიტერიუმის ოპტიმიზაციას პირველი კრიტერიუმის დათმობით ($z^1 \to \min,\ z^2 \le 25$) მივიღებთ წერტილს (24, 15), ამ შემთხვევაში აღმოჩნდა პარეტო ოპტიმალური.

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^1 * x_{ij} \quad \to \min \qquad (1)$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2 * x_{ij} \le z_2^* + \varepsilon \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1..n} \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1..n} \qquad (4)$$

$$x_{ij} = \{0, 1\},\ i, j = \overline{1..n} \qquad (5)$$

ამ ამოცანის შედეგად მიღებული ამონახსნი იქნება სლეიტერის აზრით ოპტიმალური. რადგან, თუ ზემოთ მოყვანილ ამოცანას ექნება მრავალი ოპტიმალური ამონახსნი, რომელსაც აღვნიშნავთ X-ით, მათ შორის აუცილებლად იქნება პარეტო ოპტიმალური ამონახსნი, რომლის პოვნის გარანტიას ამ ამოცანის ამოხსნა არ იძლევა. პარეტოს ამონახსნის საპოვნელად დამატებით უნდა ამოიხსნას სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა (3), (4), (5) შეზღუდვებით :

$$z_2 \to \min$$

$$z_1 = z_1^*$$

ცხრილში მოცემულია ჩატარებული ცდების მიხედვით დანიშვნის ამოცანაში პოტენციურ შემსრულებელთა რაოდენობის მიხედვით დანიშვნების სრული სიმრავლის სიდიდე, პარეტო ოპტიმალური დანიშვნების სიმრავლე და წრფივი ნახვევით ნაპოვნ ამონახსნთა რაოდენობა.

N	ცდების რაოდენობა	შემთხვევითი რიცხვების შუალედი	|X|	|P(X)|	|P(X)| / |X|	დოა_λ $(\lambda = 1)$	დოა_λ \ |P(x)|
11	3	[1,100000]	39916800	26	0,0000006681	9	0.34615
10	100	[1, 1000]	3628800	23	0.0000064	9	0.3913
10	100	[1, 10 000]	3628800	25	0.0000069		
9	100	[1, 100000]	362880	19	0,0000528	7	0.368421
8	1000	[1,100000]	40320	15	0,0003771	6	0.4

დასკვნა

დანიშვნის სკალარული ამოცანისათვის რეალიზებულია ამოხსნის უნგრული მეთოდი სტანდარტული მიზნის ფუნქციის შემთხვევაში. ასევე რეალიზებულია დანიშვნის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი minmax ტიპის მიზნის ფუნქციისათვის. შესწავლილია პარეტოს წერტილთა სტრუქტურა რიცხვით ექსპერიმენტზე დაყრდნობით. დანიშვნის ორკრიტერიუმიანი ამოცანისათვის რეალიზებულია $\varepsilon-$დათმობათა მეთოდი. ნაჩვენებია, რომ სკალარული ოპტიმიზაციის გარკვეული ტიპის ამოცანის ამოხსნის შედეგად მიღებული ამონახსნი სლეიტერის აზრით ოპტიმალურია. ეს ფაქტი სავარაუდოდ სამართლიანი იქნება დისკრეტული ოპტიმიზაციის სხვა მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანისთვისაც.

პროგრამული იმპლემენტაცია შესრულებულია C++ ენაზე.

ლიტერატურა

[1] Ehrgott M. Multicriteria Optimization, Academic Press, Springer, 2nd Edition, New York, 2005.

[2] Steuer R. Multiple Criteria Optimization, Krieger Pub Co, 1989.

[3] Salukvadze M. Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory, Academic Press, New York, 2005.

[4] Melamed I. I. Multicriteria combinatorial optimization. Theory and algorithms, Erro VI, Brussels, 1993. p.72

[5] Емеличев В.А. , Перепелица В.А. К вычислителъной сложности дискретных задач, Изв. АН СССР, Техн. Кибернетика, 1988, №1.

[6] Ehrgott M., Ryan D. Constructiong robust crew schedules with bicriteria optimization. Journal of Multi-criteria optimization. 11(3) 139-150. 2002.