

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი



ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის
ამოცანები

პროექტში მონაწილე სტუდენტები:

ადეიშვილი გიორგი, არევაძე ირაკლი, ბერიძე მარიამი,
დალაქიშვილი გიორგი, დემურჩევი კონსტანტინე, თინაშვილი ვანო,
კაპანაძე რამაზი, კეკელია ცოტნე, კილაბერია ბექა, მეყანწიშვილი ვანო,
მჭედლიშვილი ილია, სუხიშვილი ივანე, შარაშენიძე ანა, ცხონდია დავით,
ჯინჭარაძე ზურაბ, ჯობაძე გოდერძი

ხელმძღვანელი:

ნანა ოდიშელიძე - ასისტენტ-პროფესორი

თბილისი

2015

Contents

ანოტაცია.....	3
შესავალი.....	5
ამოცანის დასმა და მისი ამოხსნა	6
ერთი პოტენციალის პოვნა.....	7
გადასახვა ზედა ნახევარ წრეზე	8
დირიხლეს ამოცანაზე დაყვანა და მეორე პოტენციალის პოვნა	10
თანაბრადმტკიცე კონტურის აგება	12
ამოცანის გადაჭრის ტექნოლოგიური მეთოდები.....	12
Java და Wolfram Mathematica	12
ასახვა ვირტუალურ სამყაროში.....	14
დასკვნა	17
თანაბრადმტკიცე კონტურის გრაფიკები წესიერი ექვსკუთხედის და რომბის შემთხვევაში.....	18
References:.....	24

ანოტაცია

შესწავლილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანები (თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანები).

ხვრელის მქონე ფირფიტებში, როგორც ფირფიტის რღვევის თვალსაზრისით, ასევე ხვრელის საზღვრის წერტილთა მახლობლობაში პლასტიკური ზონების წარმოქმნაში, არსებით როლს თამაშობს ტანგენციალური-ნორმალური ძაბვები და ტანგენციალური-ნორმალური მომენტები, რომელთა მნიშვნელობებიც დამოკიდებულნი არიან გარეგან დატვირთვებზე და ხვრელის ფორმაზე. აღნიშნულიდან გამომდინარე, პრაქტიკამ დღის წესრიგში დააყენა შემდეგი ამოცანა: მოცემული გარეგანი დატვირთვის პირობებში, ფირფიტაში შეირჩეს ისეთი ფორმის ხვრელები, რომელთა საზღვარზე ტანგენციალური-ნორმალური ძაბვის მოდულის მაქსიმალური მნიშვნელობა იყოს ერთნაირი და მინიმალური იმავე სხეულში ყველა სხვა შესაძლო ხვრელებზე ამავე სიდიდეების მოდულით მაქსიმალურ მნიშვნელობებს შორის.

მტკიცდება, რომ უსასრულო არეებისათვის ტანგენციალური-ნორმალური ძაბვის მაქსიმალური მნიშვნელობის მინიმუმი მიიღწევა ისეთ კონტურებზე, რომლებზედაც ეს სიდიდეები მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებენ. ასეთ კონტურებს უწოდებენ თანაბრადმტკიცე კონტურებს. ამ ამოცანების გადაწყვეტა უზრუნველყოფს ხვრელის საზღვარზე ძაბვების ოპტიმალურ განაწილებას ხვრელის საზღვრის ფორმის სათანადო შერჩევის გზით.

კომპლექსური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით განისაზღვრება თანაბრადმტკიცე კონტური და სხეულის დაძაბული მდგომარეობა. წარმოდგენილია რიცხვითი ანალიზი და აგებულია შესაბამისი გრაფიკები Java და Wolfram Mathematica -ს საშუალებით. პროექტი ითვალისწინებს ძალის ზეგავლენის შედეგად სხეულის დეფორმაციის ასახვას ვირტუალურ სამყაროში და სერვისის შექმნას, რომელიც მოგვაწვდის ინფორმაციას ამ მოვლენის მახასიათებლებზე და ასევე შედეგზე.

Full-strength contour finding problems

Abstract

The paper addresses partially unknown boundary problems (full-strength contours finding problems) of plane elasticity theory and plate bending. Tangential normal stresses whose values depend on external loads and hole shapes play an important role in the plasticity zone formation in the plates with the holes and also in the plate destruction in the neighborhood to the plate's hole boundary. Proceeding from the above -mentioned, the following tasks were assigned: in conditions of provided external loads the shapes of the holes in plates should be chosen so that on the boundaries tangential normal stresses module's maximal value will be the same and minimal in the same body in all other possible holes tangential normal stresses maximal value of module.

It's proven that for infinite domains tangential normal stresses the minimum of maximal value will be obtained on such contours, where this value maintains the constant value. These contours are named full-strength contours. The solvability of these problems provides controlling stress optimal distribution selecting the appropriate hole boundary.

Using the methods of complex analysis the unknown full-strength contour and stressed state of the body are determined. Numerical analysis are performed and the corresponding graphs are constructed by Java and Wolfram Mathematica.

The project involves reflection in the virtual world of body deformation which happened under the force action, and a service creation that provide with information on the characteristics of this event and also on the outcome.

შესავალი

შესწავლილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანები (თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანები) წესიერი ექვსკუთხედისათვის და რომბისთვის .

აღნიშნული ამოცანების გადაწყვეტა ემსახურება როგორც კონსტრუქციის სიმტკიცის უნარიანობის გაზრდას, ასევე მისი წონის მინიმიზაციასაც.

თანაბრადმტკიცე კონტურების მოძებნის ამოცანების შესწავლა დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის ამოცანებში უსასრულო არეებისათვის სათავეს იღებს გასული საუკუნის 60-ანი წლებიდან და მათ ასახვა ჰპოვეს გ. ჩერეპანოვის, ნ. ბანიჩუკის, გ. ივანოვის, დ. კოსმოდამიანსკის, ჰ. ნიეიბერის, ს. ვიგდერგაუზის და სხვათა შრომებში.

საინტერესო აღმოჩნდა აღნიშნული ამოცანების შესწავლა ტეხილებითა და თანაბრადმტკიცე უცნობი კონტურებით შემოსაზღვრული სასრული ორადბმული და მრავლადბმული არეებისათვის, რომელთა კვლევა დაიწყო გასული საუკუნის 80-იანი წლებიდან და ეს პროცესი დღესაც ინტენსიურად გრძელდება.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტების ღუნვის შემთხვევებში თანაბრად მტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანების გადასაწყვეტად ყველაზე ეფექტური აღმოჩნდა ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანების მეთოდები.

პროექტის მიხედვით შესწავლილი არის თანაბრადმტკიცე კონტურის მოძებნის ამოცანები სასრული არეებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრულებია ტეხილებითა და საძიებელი კონტურებით. კომპლექსური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით, დასმული ამოცანები მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანაზე. საძიებელი თანაბრადმტკიცე კონტურების ანალიზური სახე აგებულია ეფექტურად.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტის ღუნვის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანები უსასრულო სიბრტყის შემთხვევაში შესწავლილია [1, 2, 8, 12 და 17].

სასაზღვრო ამოცანები სასრული ორადბმული არეებისათვის, რომლის საზღვრის ერთი ნაწილი არის თანაბრად მტკიცე კონტური, ხოლო მეორე მისი ნაწილი არის მრავალკუთხედის წირი შესწავლილია [6, 7].

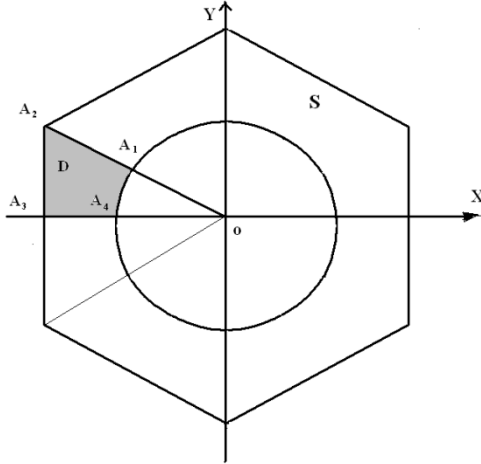
ღერძ-სიმეტრიული, ციკლურად-სიმეტრიული დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ფირფიტის ღუნვის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანები შესწავლილია [3, 4, 5, 13, 14, 15, და 16].

ამ ამოცანების გადაწყვეტა უზრუნველყოფს ხვრელის საზღვარზე ძაბვების ოპტიმალურ განაწილებას ხვრელის საზღვრის ფორმის სათანადო შერჩევის გზით.

თანაბრადმტკიცე კონტურის შესაბამისი გრაფიკები აგებულია Java და Wolfram Mathematica -ს საშუალებით. შეიქმნა სერვისი, რომელიც აწვდის ინფორმაციას სხეულის დეფორმაციის მახასიათებლებზე და ასევე შედეგზე.

ამოცანის დასმა და მისი ამოხსნა

ვთქვათ იზოტროპული დრეკადი სხეული სიბრტყეზე წარმდგენილია წესიერი ექვსკუთხედით, რომელიც შესუსტებულია უცნობი თანაბრადმტკიცე ხვრელით. საზღვრის წრფივ მონაკვეთებზე მოდებულია სწორფუძიანი გლუვი ხისტი შტამპები, რომლის შუა წერტილებზე მოდებულია შეყურსული ძალები P , ისეთნაირად რომ ხახუნის ძალები არ რის შტამპებსა და დრეკადი სხეულს შორის. საზღვრის უცნობი ნაწილი თავისუფალია გარე დატვირთვებისაგან. ამ დაშვებიდან გამომდინარე მონაკვეთებზე ნორმალური გადაადგილებები უბან-უბან მუდმივია $v_n = v = const$, ხოლო მხების ძაბვები ნულის ტოლია $\tau_{ns} = 0$



ამოცანის დასმა: მოვებნოთ სხეულის დაძაბული მდგომარეობა და ისეთი ფორმა უცნობი ხვრელისა, რომელზედაც ტანგენციალური ნორმალური ძაბვები σ_s ღებულობდეს მუდმივ მნიშვნელობას $\sigma_s = K = const$

რადგან ამოცანა ციკლურად სიმეტრიულია ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ამოცანაზე მრუდწირული ოთკუთხედისთვის $A_1A_2A_3A_4$ რომელსაც აღვნიშნავთ D .

შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\Gamma_1 = A_1A_2, \Gamma_2 = A_2A_3, \Gamma_3 = A_3A_4, \gamma = A_4A_1, \Gamma = \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_j$.

სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება

$$v_n = \begin{cases} 0, & t \in \Gamma_3 \cup \Gamma_1, \\ v & t \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau_{ns} = 0, t \in \Gamma \cup \gamma, \quad (2)$$

$$\sigma_n = 0, \sigma_s = K, t \in \gamma$$

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_n ds = -P, \int_{\Gamma_2} \sigma_n ds = \frac{-P}{2}, \int_{\Gamma_3} \sigma_n ds = -\frac{\sqrt{3}}{2} P \quad (3)$$

ერთი პოტენციალის პოვნა

კოლოსოვ - მუსხელიშვილის ფორმულების საფუძველზე, ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ψ, φ ფუნქციების მოძებნაზე, რომლებიც ჰოლომორფულია D - ში და აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} (\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}) = 2\mu\nu_n(t), \quad t \in \Gamma, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} (\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}) = C(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5)$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0, \quad t \in \gamma, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \varphi'(t) = \frac{\sigma_n + \sigma_s}{4} = \frac{K}{4}, \quad t \in \gamma, \quad (7)$$

χ, μ - დრეკადობის კოეფიციენტებია, $C(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა, $\alpha(t)$ - არის კუთხე კონტურის გარე ნორმალსა n და Ox ღერძს შორის.

$$\alpha(t) = \alpha_k, \quad t \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \quad (8)$$

$$C(t) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha(t)} i \left(\int_{A_1}^t \sigma_n(s_0) e^{i\alpha(s_0)} ds_0 \right) \right) \quad (9)$$

$$C(t) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}P}{2}, & t \in \Gamma_2 \\ 0, & t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases} \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} t e^{-i\alpha(t)} = \operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} A(t), \quad t \in A_k A_{k+1}, \quad k = 1, 2 \text{ and } t \in A_4 A_1 \quad (11)$$

ვუშვებთ, რომ ფუნქციები $\varphi(z), \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ უწყვეტებია ყველგან D საზღვარზე, როდესაც ფუნქციები $\varphi'(z), \psi(z)$ უწყვეტად განგრძობადნი არიან D საზღვარზე, გარდა A_2 წერტილისა, რომლის მიდამოშიც უშვებთ შემდეგ შეფასებას

$$|\varphi'(z)| < M|z - A_2|^{-\delta}, \quad |\psi(z)| < M|z - A_2|^{-\delta}, \quad 0 \leq \delta < 1 \quad (12)$$

თუ შევკრიბავთ (4), (5) და გავაწარმოებთ რეალური აბსცისით s მიმართ, იმის გათვალისწინებით რომ $\alpha(t), C(t), \nu_n(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია Γ - ზე, მივიღებთ

$$\operatorname{Im} \varphi'(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (13)$$

(7) და (13) ტოლობები არის კელიძ-სედოვის ამოცანა D არისთვის

(14)

$$\operatorname{Re}\left(\varphi'(t) - \frac{K}{4}\right) = 0, \quad t \in A_4 A_1,$$

$$\operatorname{Im}\left(\varphi'(t) - \frac{K}{4}\right) = 0, \quad t \in \Gamma.$$

(14) ამოცანას აქვს ერთადერთ ამოხსნა [11]

$$\varphi'(z) = \frac{K}{4} \tag{15}$$

აქედან

$$\varphi(z) = \frac{K}{4} z. \tag{16}$$

აქ მუდმივს უგულებელყოფთ.

თუ შევიტანთ $\varphi(t)$, $C(t)$ მნიშვნელობებს (5) - (6) სასაზღვრო პირობებში, მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha(t)}\left(\frac{k}{2}t + \overline{\psi(t)}\right)\right] = C(t) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}P}{2}, & t \in \Gamma_2 \\ 0, & t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases} \tag{17}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} = \operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} A(t), \quad t \in \Gamma, \tag{18}$$

$$\left(\frac{k}{2}t + \overline{\psi(t)}\right) = 0, \quad t \in \gamma \tag{19}$$

გადასახვა ზედა ნახევარ წრეზე

ვთქვათ, ფუნქცია $z = \omega(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ გადასახავს $|\zeta| < 1$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$ ნახევარწრეს კონფორმულად D არეზე. დავუშვათ, ექვსკუთხედის წვეროებს A_k შეესაბამება ნახევარწრეწირის წერტილები $a_k = \omega^{-1}(A_k)$, $k = 1, 2, 3$. დავუშვათ, რომ $a_1 = 1$, $a_4 = -1$, $a_3 = i$. აქ შეგვიძლია დავაფიქსიროთ სამი წერტილი, დანარჩენი წერტილები პროცესში განისაზღვრება. მაშინ დიამეტრი $-1 \leq \xi \leq 1$ გადასახება რკალზე $A_4 A_1$ და ნახევარწრეწირი გადასახება ტეხილზე Γ . წერტილი $a_2 = e^{i\vartheta_2}$, $0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$ განისაზღვრება.

(17) - (19) საფუძველზე სასაზღვრო პირობები გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)} \overline{\psi_0(\sigma)} = -\frac{K}{2} \operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} A(\sigma) + C(\sigma), \quad \sigma \in \gamma_0, \tag{20}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}\omega(\sigma) = \operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma), \quad \sigma \in \gamma_0, \quad (21)$$

$$\frac{K}{2}\omega(\sigma) + \overline{\psi_0(\sigma)} = 0, \quad \sigma \in (-1, 1), \quad (22)$$

$$\psi_0(\zeta) = \psi(\omega(\zeta)).$$

რადგან $\alpha(t), A(t), C(t)$ – არიან უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებია, $\alpha(\omega(\sigma)), A(\omega(\sigma)), C(\omega(\sigma))$ აღნიშნება $\alpha(\sigma), A(\sigma), C(\sigma)$.

შემოვიტანოთ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია $W(\zeta)$ წრეში $|\zeta| < 1$.

$$W(\zeta) = \begin{cases} \frac{K}{2}\omega(\zeta), & |\zeta| < 1, \operatorname{Im}\zeta > 0 \\ -\overline{\psi_0(\overline{\zeta})} & |\zeta| < 1, \operatorname{Im}\zeta < 0 \end{cases} \quad (23)$$

(23) გათვალისწინებით

$$W^+(\xi) = \frac{K}{2}\omega(\xi), \quad W^-(\xi) = -\overline{\psi_0(\overline{\xi})}, \quad -1 < \xi < 1, \quad (24)$$

$$W^+(\sigma) = \frac{K}{2}\omega(\sigma), \quad \sigma \in \gamma_0, \quad W^-(\sigma) = -\overline{\psi_0(\overline{\sigma})}, \quad \sigma \in \gamma_0^*, \quad (25)$$

სადაც ნიშნები (+) და (-) როგორც ჩვეულებრივ, აღნიშნავენ ფუნქციის მნიშვნელობებს საზღვრის ზედა და ქვედა ნაწილებზე, γ_0^* არის სარკისებური ასახვა γ_0 Ox -ღერძის მიმართ. (22) და (24) -დან ვღებულობთ

$$W^+(\xi) - W^-(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < 1.$$

რაც ნიშნავს, რომ $W(\zeta)$ არის ჰოლომორფული ფუნქცია წრეში $|\zeta| < 1$.

(23)-ს შესაბამისად, ვღებულობთ

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}W(\sigma) = \frac{K}{2}\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma), \quad \sigma \in \gamma_0, \quad (26)$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}W(\sigma) = -C(\sigma) + \frac{K}{2}\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma), \quad \sigma \in \gamma_0^*, \quad (27)$$

პირობები (26) და (27) შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}W(\sigma) = f(\sigma), \quad \sigma \in \gamma' \quad (28)$$

სადაც

$$\gamma' = \gamma_0 \cup \gamma_0^*, \quad \alpha(\sigma) = \alpha(\overline{\sigma}), \quad \sigma \in \gamma_0^*, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2},$$

$$f(\sigma) = \frac{K}{2}\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma) = \begin{cases} \frac{Ka\sqrt{3}}{4}, & \sigma \in (a_2, a_3) \\ 0, & \sigma \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \end{cases} \quad (29)$$

$$f(\sigma) = \frac{K}{2} \operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)} A(\sigma) - C(\sigma) = \begin{cases} \frac{Ka\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} P, & \sigma \in (\overline{a_3}, \overline{a_2}) \\ 0, & \sigma \in (a_4, a_3) \cup (\overline{a_2}, a_1) \end{cases}$$

დირიხლეს ამოცანაზე დაყვანა და მეორე პოტენციალის პოვნა

დასმული ამოცანა დავიდა რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე [10] უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით. ეს ამოცანა დაიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე წრისათვის, რომლის ამოხსნაც წარმოდგენილია შვარცის ინტეგრალით, რაც ხელსაყრელია გამოთვლების თვალსაზრისით.

ფუნქცია $e^{2i\alpha(\sigma)}$ მოიცემა ფორმულით.

$$e^{2i\alpha(\sigma)} = \frac{X(\sigma)}{\overline{X(\sigma)}}, \quad |\sigma| = 1, \quad (30)$$

სადაც $X(\zeta)$

$$X(\zeta) = \frac{\sqrt{(\zeta - \overline{a_3})(\zeta - a_3)}(\zeta - a_2)^{\frac{1}{3}}(\zeta - \overline{a_2})^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{a_2}}{\zeta}, \quad |\zeta| < 1,$$

(30)-ს საფუძველზე პირობა (28) გახდება

$$\frac{W(\sigma)}{X(\sigma)} + \frac{\overline{W(\sigma)}}{\overline{X(\sigma)}} = \frac{2fe^{i\alpha(\sigma)}}{X(\sigma)}. \quad (31)$$

პირობა (31) წარმოადგენს დირიხლეს ამოცანის სასაზღვრო პირობას, რომლის ამოხსნა წარმოდგენილია შვარცის ფორმულით

$$\frac{W(\zeta)}{X(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}(\sigma + \zeta)d\sigma}{X(\sigma)\sigma(\sigma - \zeta)} \quad (32)$$

რადგან ფუნქციას $X(\zeta)$ აქვს პირველი რიგის პოლუსი $\zeta = 0$ წერტილზე, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციას $\frac{W(\zeta)}{X(\zeta)}$ ექნება პირველი რიგის ნული. შესაბამისად (32) - დან

მივიღებთ

$$\int_{\gamma'} \frac{f(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma}{X(\sigma)\sigma} = 0 \quad (33)$$

(8)-ს და (29)-ს გათვალისწინებით (33)-ს ექნება სახე

$$-\frac{Ka\sqrt{3}}{4} \int_{a_2}^{a_3} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma} - \left(\frac{Ka\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} P \right) \int_{a_3}^{\overline{a_2}} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma} = 0 \quad (34)$$

ამრიგად ჩვენ მივიღეთ განტოლება ორი უცნობი პარამეტრების მიმართ a_2, K .

ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ რაღაც მნიშვნელობა K და შემდეგ განვსაზღვროთ პარამეტრი a_2 . მაშინ ამოცანა არსებითად გართულდება. გამოთვლის თვალსაზრისით, უფრო ხელსაყრელია გამოვთვალოთ K ყოველი ფიქსირებული წერტილისათვის $a_2 = e^{i\vartheta_2}$, $0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$ და მოცემული P -თვის. (34)

-დან ვღებულობთ:

$$K = \frac{-\sqrt{3}PB}{a\sqrt{3}(A+B)}, \quad (35)$$

$$\text{სადაც } A = \int_{a_2}^{a_3} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma}, B = \int_{a_3}^{\bar{a}_2} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma}.$$

შენიშვნა. ამოხსნა არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$A + B \neq 0$$

(33)-ს საფუძველზე ფორმულას (32)-ს ექნება სახე:

$$W(\zeta) = \frac{\zeta X(\zeta)}{\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\sigma) e^{i\alpha(\sigma)} d\sigma}{X(\sigma)\sigma(\sigma - \zeta)} \quad (36)$$

ე.ი.:

$$W(\zeta) = \frac{\zeta X(\zeta)}{\pi i} \left(-\frac{Ka\sqrt{3}}{4} \int_{a_2}^{a_3} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma(\sigma - \zeta)} - \left(\frac{Ka\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} P \right) \int_{a_3}^{\bar{a}_2} \frac{d\sigma}{X(\sigma)\sigma(\sigma - \zeta)} \right).$$

(23)-ს საფუძველზე, კონტურის განტოლება $z = \omega(\xi)$ წარმოდგინდება

$$\omega(\xi) = \frac{2W(\xi)}{K}, \quad -1 < \xi < 1. \quad (37)$$

ანალოგიური მიდგომით იგება თანაბრადმტკიცე ხვრელი რომბისთვის.

თანაბრადმტკიცე კონტურის აგება

ვთქვათ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდის სიგრძეა $a=3$. თანაბრადმტკიცე კონტურის აგებისათვის, თავდაპირველად გამოვთვლით K (35) საფუძველზე ყოველი ფიქსირებული წერტილისათვის $a_2 = e^{i\theta_2}$, $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ და მოცემული P . თვის. მაშინ ჩვენ გამოვთვლით $W(\xi)$ (36) ფორმულით ყოველი ფიქსირებული პარამეტრებისთვის a_2 და K . შესაბამისად, $\omega(\xi)$ ფუნქცია განისაზღვრება (37) გამოსახულებით. $\omega(\xi)$, $-1 < \xi < 1$ ფუნქციის სახე წარმოადგენს თანაბრადმტკიცე კონტურის ნაწილს. რადგანაც ძაბვები $P > 0$ კუმშვითია, ამიტომ გამომდინარეობს, რომ $K < 0$.

თანაბრადმტკიცე კონტურის აგებისათვის, ჯერ ავაგებთ მის რკალს $\gamma = A_4A_1$ ფორმულით (37): $w = \omega(\xi)$, $-1 < \xi < 1$ თანაბრადმტკიცე კონტურისა. დანარჩენი ნაწილები იგება შემდეგი ფორმულებით

$$w = \omega(\xi), r = \operatorname{Re}(\omega(\xi)) - i \operatorname{Im}(\omega(\xi))$$

$$u(\xi) = w(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, h(\xi) = u(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, g(\xi) = h(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, p(\xi) = g(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, q(\xi) = p(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}},$$

$$s(\xi) = r(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, t(\xi) = s(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, z(\xi) = t(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, y(\xi) = z(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}, j(\xi) = y(\xi)e^{\frac{\pi i}{3}}$$

რადგანაც ამოცანა ციკლურად სიმეტრიულია ამიტომ თანაბრადმტკიცე კონტურის სხვა ნაწილები აიგება w , r გრაფიკების $\frac{\pi}{3}$ კუთხით ბრუნვით.

ანალოგიურად აიგება თანაბრადმტკიცე ხვრელი რომბისთვის, მხოლოდ, თანაბრადმტკიცე კონტურის ნაწილის ბრუნვის ნაცვლად ვახდენთ ღერძული სიმეტრიით ასახვას.

ამოცანის გადაჭრის ტექნოლოგიური მეთოდები

Java და Wolfram Mathematica

ამოცანის გადასაჭრელად შერჩეული იყო Java და Wolfram Mathematica-ს ტექნოლოგიები.

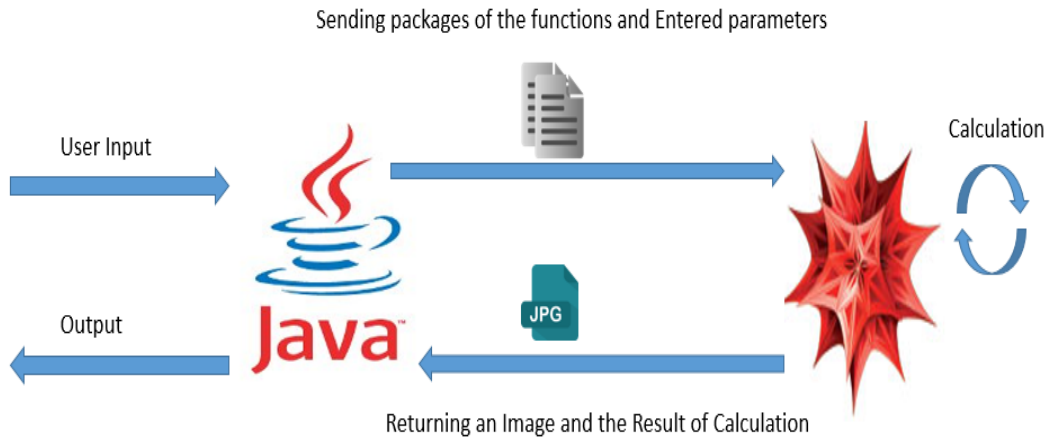
Java წარმოადგენს ობიექტზე ორიენტირებულ ენას, რომელიც გამოირჩევა სიჩქარით, მულტიპლათფორმულობით და სიმარტივით.

Wolfram Mathematica - მძლავრი ინსტრუმენტია რომელიც საშუალებას იძლევა ამოცანის ამოსახსნელად ყველა საჭირო გამოთვლებისა და გრაფიკების აგებას.

ამოცანის გამოთვლები და გრაფიკის აგება განხორციელდა Wolfram Mathematica-ით. Java წარმოადგენს გარე კარკასს, რომელიც განკუთვნილია მომხმარებელთან სამუშაოდ.

Wolfram Mathematica-ში შეიქმნა პაკეტები, რომლებშიც პროგრამულად ავაგეთ ყველა ის ფუნქცია, რომელიც გვესაჭიროება ამოცანის რიცხვითი

რეალიზაციისთვის. სწორად ამ პაკეტების გამოყენებით განხორციელდა გამოთვლითი ნაწილი, ხოლო შემდგომ აიგო User Interface-ი Java-ზე.



სისტემა მუშაობს შემდეგნაირად:

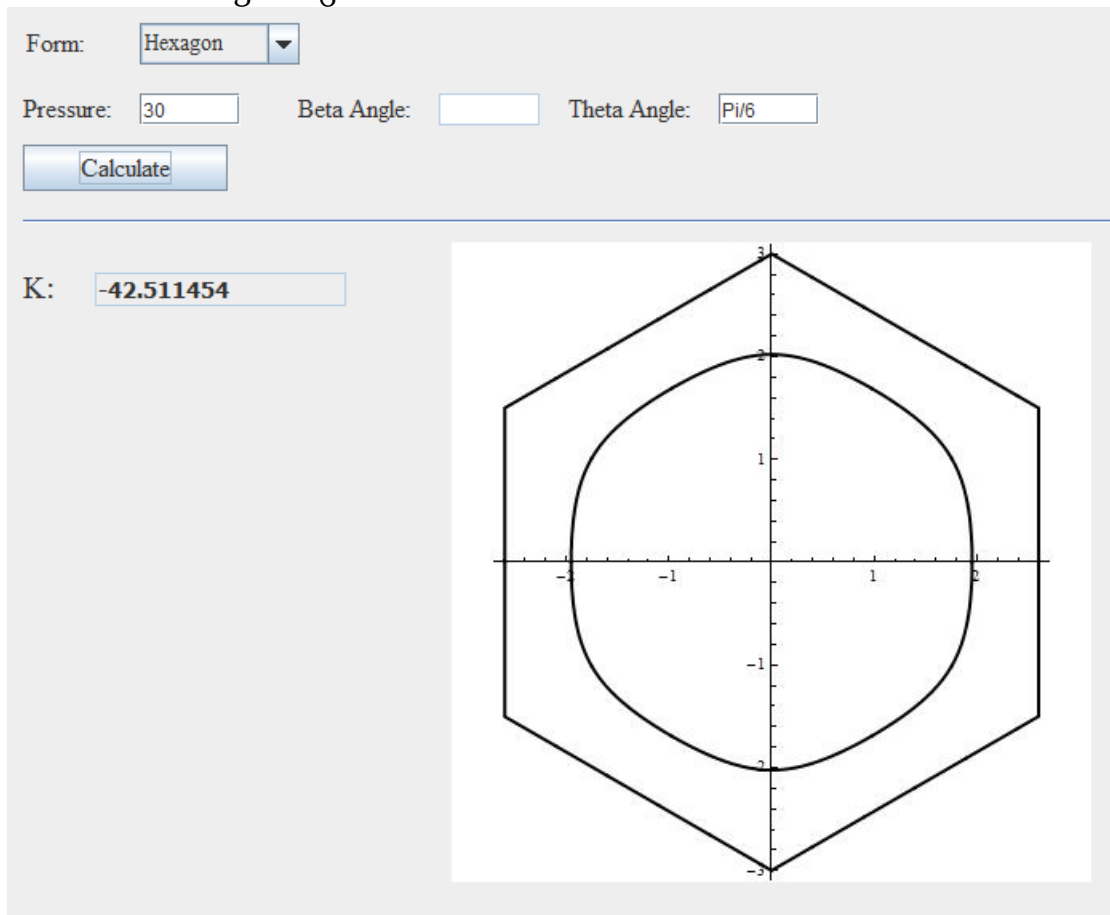
- მომხმარებელს შეჰყავს ის პარამეტრები, რომლებისთვისაც უნდა განხორციელდეს გამოთვლები.

The screenshot shows a graphical user interface for a Java application. At the top, there is a 'Form:' dropdown menu currently set to 'Hexagon'. Below it are three input fields: 'Pressure:' with the value '30', 'Beta Angle:' which is empty, and 'Theta Angle:' with the value 'Pi/6'. A 'Calculate' button is positioned below these fields. Underneath the button is a label 'K:' followed by an empty input field. The bottom half of the interface is a plot area with a coordinate system. The x-axis and y-axis both range from -1.0 to 1.0, with major tick marks at -1.0, -0.5, 0.5, and 1.0.

- Java აპლიკაცია ამყარებს კავშირს Wolfram Mathematica-ს ბირთვთან,

აწვდის მას შემოტანილ პარამეტრებს და იმ პაკეტს, რომელიც საჭიროა მოცემული ამცანის ამოსახსნელად.

- მიღებული ინფორმაციის საშუალებით ხორციელდება გამოთვლები და აიგება შესაბამისი გრაფიკები. შემდგომ ეს ყველაფერი ბრუნდება Java აპლიკაციის მხარეს.
- Java აპლიკაცია მომხმარებელს წარმოუდგენს მიღებულ ინფორმაციას.



ასახვა ვირტუალურ სამყაროში

პროექტი ითვალისწინებს. ძალის ზეგავლენით სხეულის დეფორმაციის მოვლენის ასახვას ვირტუალურ სამყაროში და სერვისის შექმნას რომელიც ინფორმაციას მოგვაწვდის ამ მოვლენის მახასიათებლებზე და ასევე შედეგზე.

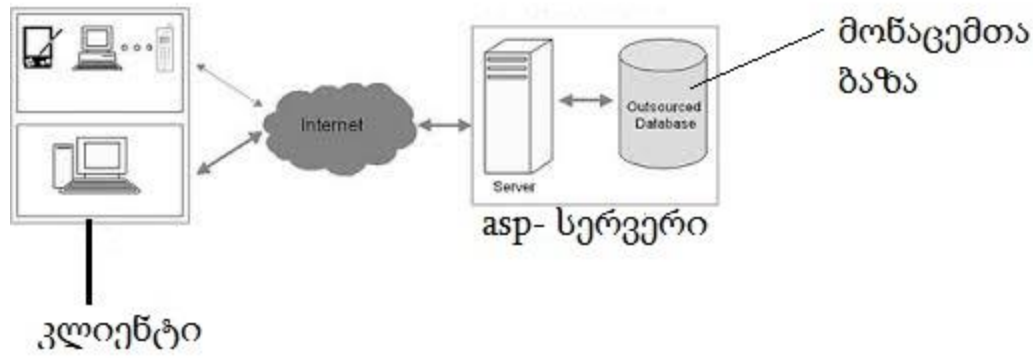
ტექნიკური შესასრულებელი სამუშაოები

- 1) მონაცემთა ბაზის შექმნა. Visual studio
- 2) ASP-ს სერვერის შექმნა რომელიც დააკავშირებს მომხმარებელს ბაზასთან. Visual studio
- 3) სერვისის შექმნა და API-ის გაწერა. Visual studio
- 4) ვირტუალური სამყაროს შექმნა და მოცემული მოვლენის ფიზიკური სხეულების რეალიზაცია მის შიგნით. Unreal engine

5) ვირტუალური სამყაროს ვიზუალური გამართვა და სერვერიდან ინფორმაციის წამოღება.

6) plugin -ის შექმნა რისი მეშვეობითაც აპლიკაცია დაუკავშირდება სერვერს.

ახსნა განმარტებები



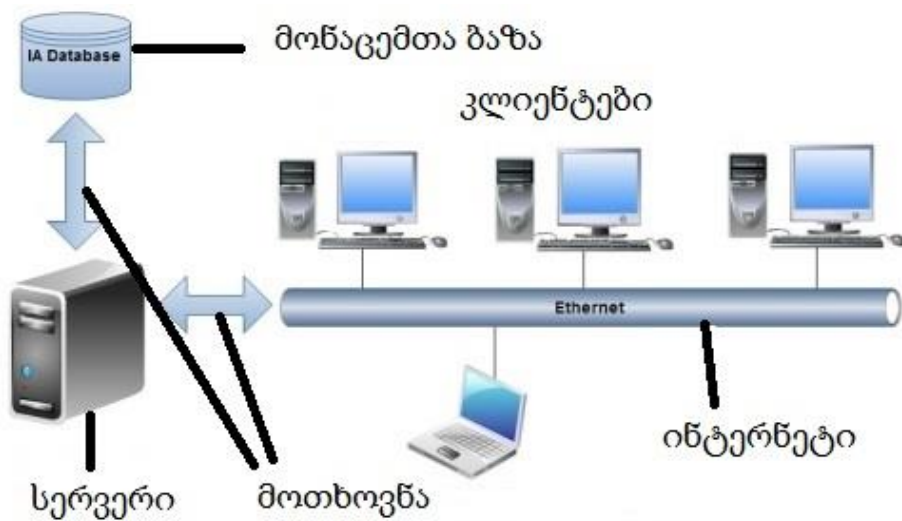
ჩვენი დავალება იყოფა ორ ქვე ჯგუფად: სერვერი იგივე მაკონტროლებელი რომელიც ბაზის მონაცემებს აწვდის მომხმარებელს. კლიენტი ანუ იგივე მომხმარებელი რომელიც ამ მონაცემებს იღებს. ესენი არიან ქარხანა რომელიც ამ დეტალს ამუშავებს, პერსონალი რომელიც გამოთვლის ფორმულით დეტალის გამძლეობას მოცემულ კუთხეზე და ძალაზე და ამას ბაზაში შეინახავს. და მესამე ეს არის მომხმარებელი რომელიც სიმულაციას ახდენს აპლიკაციის მეშვეობით.

სერვერის მხარე იყოფა სამ ნაწილად.

- 1) ეს არის სერვერის გამართვა ვიზუალ სტუდიოში ASP.Net-ის გამოყენებით.
- 2) მონაცემთა ბაზის შექმნა. ეს პროცესიც ხორციელდება ვიზუალ სტუდიოს გამოყენებით
- 3) ეს არის ვუზრუნველყოთ კლიენტიდან წამოსული მოთხოვნის დამუშავება და პასუხის დაბრუნება. ანუ ყველა ამ ნაწილების გაერთიანება.

კლიენტის მხარეს შესასრულებელი სამუშაოებიც მსგავსი ტიპისაა

- 1) უნდა შევქმნათ ვირტუალური გარემო და გავაკეთოთ აფეთქების სიმულაცია რომელიც დამოკიდებული იქნება სერვერიდან დაბრუნებულ პასუხზე.
- 2) შევქმნათ თარჯიმანი ეგრეთ წოდებული plugin რომელიც იურთიერთებს სერვერთან და მოთხოვნას გააგზავნის და მიღებულ შედეგს გადასცემს ჩვენს აპლიკაციას
- 3) მოვახდინოთ ამ აპლიკაციის ვიზუალური და ლოგიკური გამართვა.



ეს არის მოდელი რომელსაც ჩვენი პროგრამა იყენებს.
 1) მონაცემთა ბაზა რომელშიც ინახება ინფორმაცია. მაგალითად ა)x-ძალაზე 45 გრადუსიანმა დეტალმა გაუძლო თუ არა დაწოლას. ბ)y-ძალაზე 120 გრადუსიანმა დეტალმა 6 კუთხედმა გაუძლო თუ არა დაწოლას . და ა.შ.

2)სერვერი- ეს ნაწილი უზრუნველყოფს მონაცემების ჩაწერა/წაშლას მონაცემთა ბაზაში და მათ გადაცემას კლიენტებისთვის.

3) კლიენტები - ესენი არიან მომხმარებლები რომლებიც ინფორმაციას ღებულობენ ბაზიდან. მაგალითად ქარხანა ან ჩვენი აპლიკაცია

4) კლიენტებმა იმისათვის რომ მიიღონ ინფორმაცია ბაზიდან. მათ უნდა გააგზავნონ მოთხოვნა სერვერზე. სერვერი დაამუშავებს ამ მოთხოვნას და ბაზიდან შესაბამის ინფორმაციას დაუბრუნებს უკან.

დასკვნა

ამ ამოცანების შესასწავლად ყველაზე ეფექტური მეთოდები აღმოჩნდა კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციათა თეორიის მეთოდები. ეს ამოცანები არიან როგორც მექანიკის ასევე გეომეტრიის, რადგანაც საძიებელია ხვრელის ფორმა და კონფორმულად ამსახველი ფუნქცია მის განსასაზღვრად.

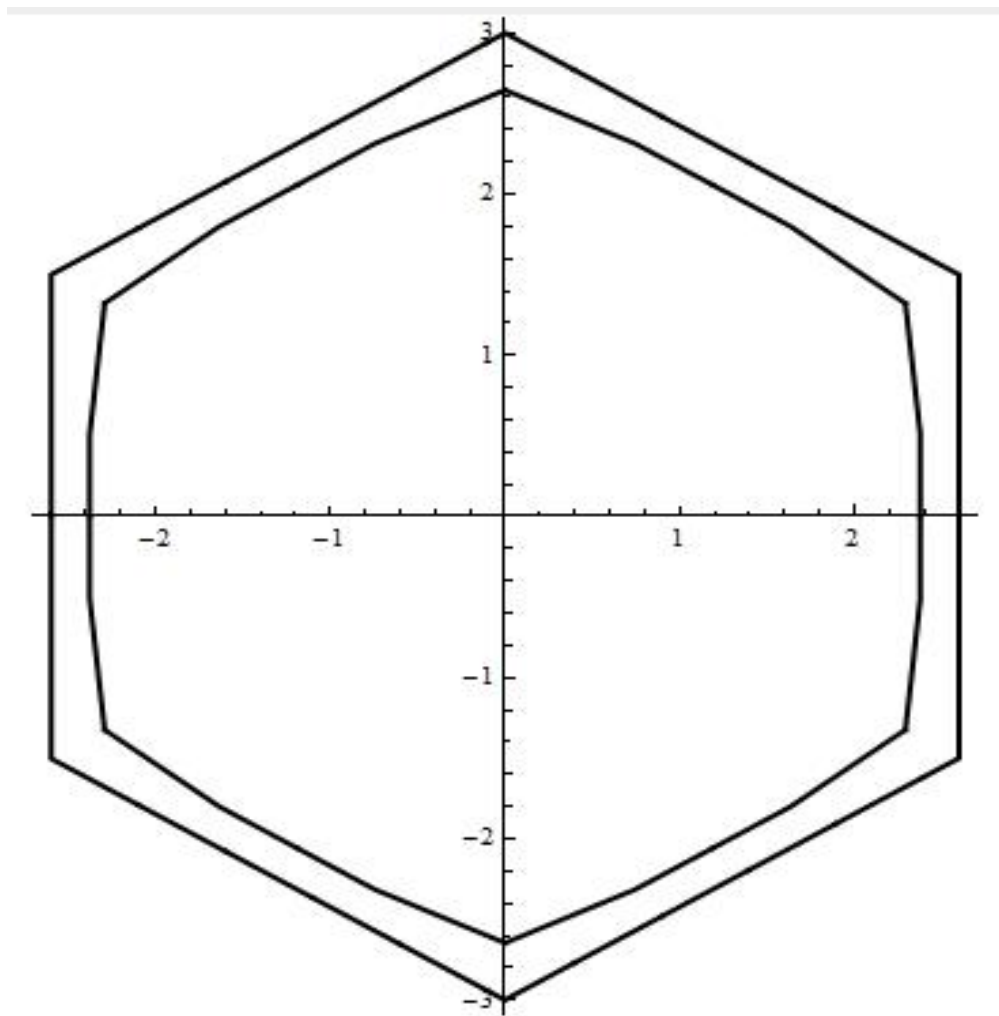
ამრიგად, კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულებია გამოყენებული ამ ამოცანის ამოსახსნელად. კონფორმულად ამსახველი ფუნქციის გამოყენებით დასმული ამოცანა დაყვანილია რიჟან-ჰილბერტის ამოცანაზე. მისი ამოხსნა ჩაწერილია კვადრატურებში. აგებულია თანაბრადმტკიცე კონტური.

მტკიცდება, რომ ტანგენციალური-ნორმალური ძაბვები ფირფიტაში, შესუსტებული თანაბრადმტკიცე კონტურით არის 40% ნაკლები ვიდრე მაქსიმალური ტანგენციალური-ნორმალური ძაბვების მნიშვნელობებისა ფირფიტისათვის რომელიც შესუსტებულია წრიული ხვრელით.

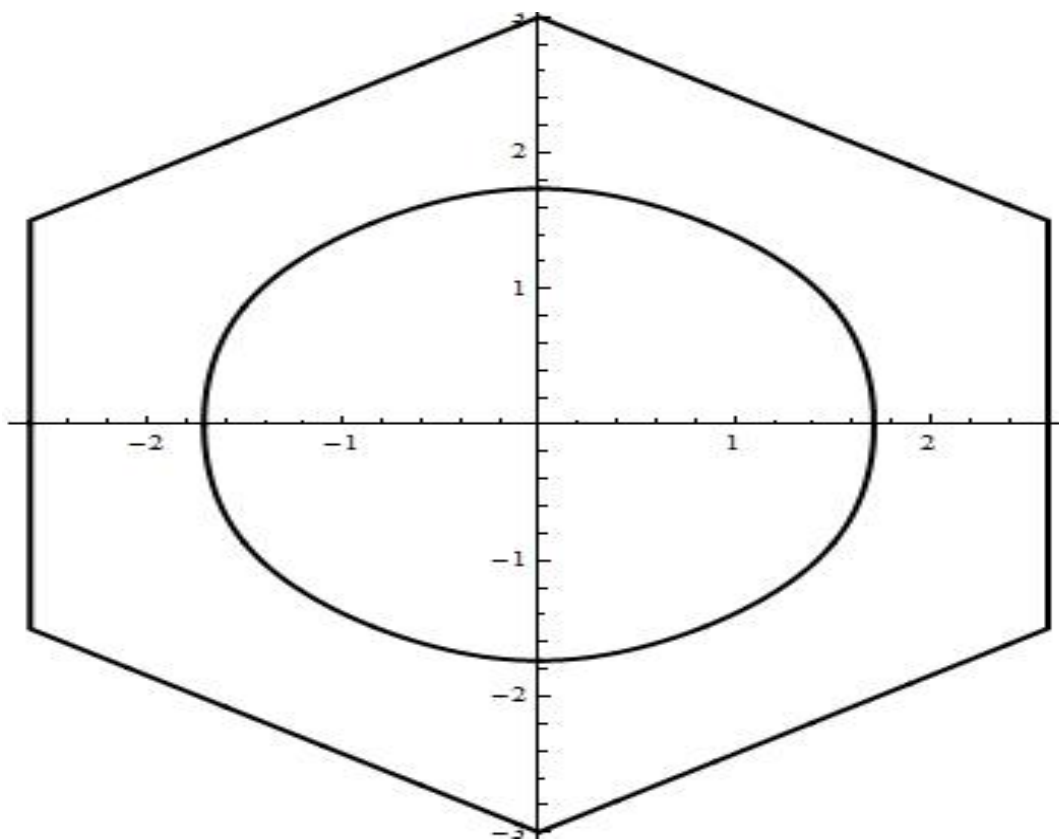
ჩვენ შევქმენით სერვისი რომელიც უზრუნველყოფს კლიენტისათვის ინფორმაციის მიწოდებას მონაცემთა ბაზიდან სადაც ინახება ინფორმაცია ფირფიტაზე. შესაბამისად ნებისმიერი ქარხანა რომელიც დაინტერესებულია ამ სიმულაციით ინფორმაციას იღებს რაოდენიმე წამში. რაც დროის და ხარჯის ეკონომიას აკეთებს. ასევე შექმენით 3D სიმულაცია რომელიც დაახლოებით ანახებს მოდელს თუ რა დაემართება სხეულს ამა თუ იმ ზემოქმედებაზე.

თანაბრადმტკიცე კონტურის გრაფიკები წესიერი ექვსკუთხედის და რომბის შემთხვევაში

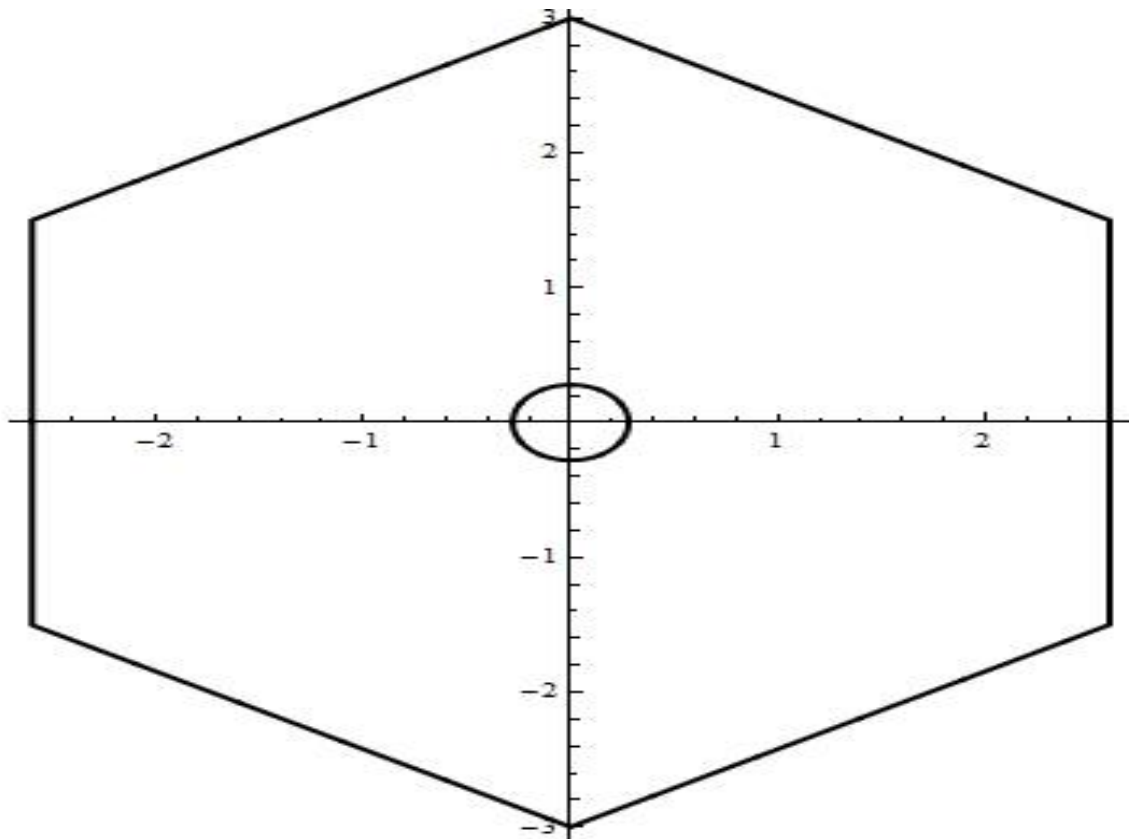
$P=30, a=3, \theta_2=\pi/5000, K=-117.10751$



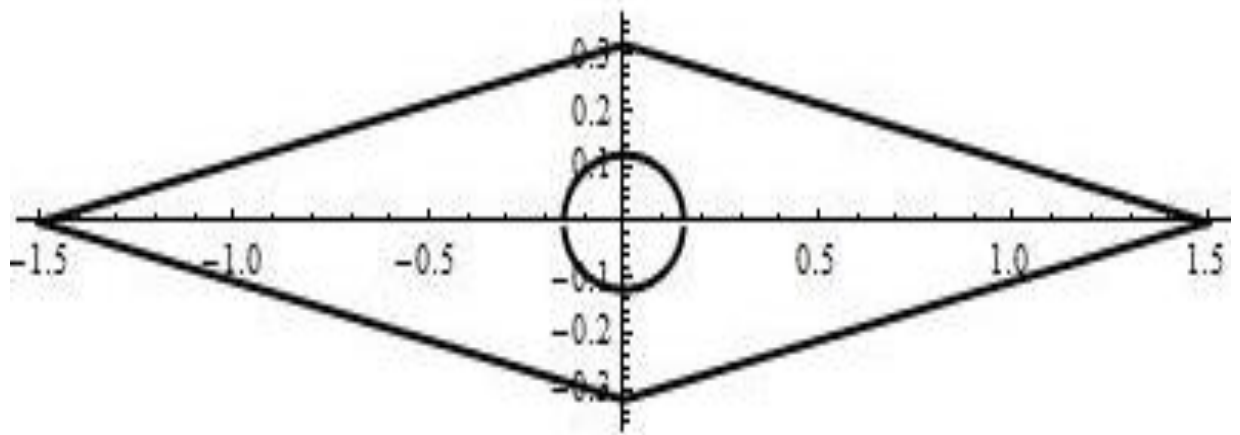
$P=50, a=3, \theta_2=\pi/3, K=-55.465013$



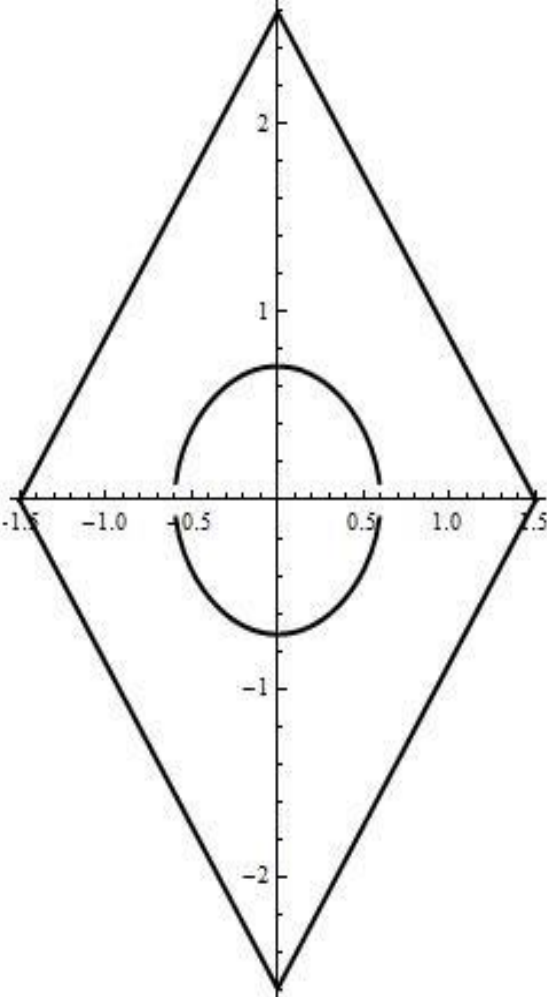
$P=50, a=3, \theta_2=\pi/2-0,000001 K=-33.690734$



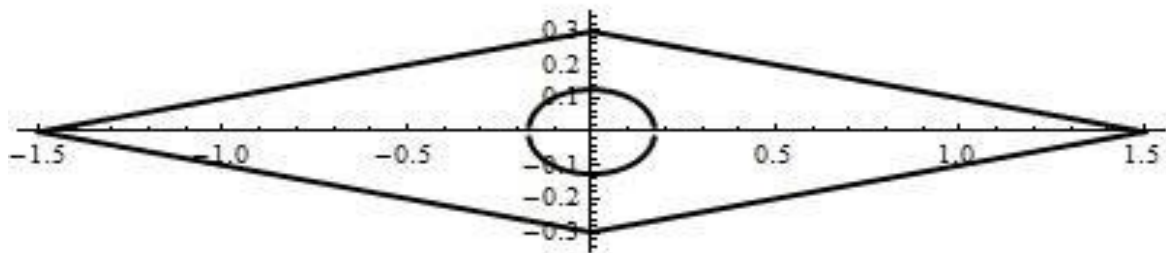
$P=10$, $\beta = \pi/15$, $\theta_2 = \pi/5$ $K = -14.05$



$P=30, \beta = \pi/3, \theta_2 = \pi/9, K = -24.078$



$P=50$, $\beta = \pi/16$, $\theta_2 = \pi/7$ $K = -71.92$



References:

- [1] N. V. Banichuk, *Optimality conditions in the problem of seeking the hole shapes in elastic bodies*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 41, No. 5, 1977 , pp 920–925.
- [2] N. V. Banichuk, *Optimization of forms of elastic bodies*, Nauka, Moscow, 1980.
- [3] R. Bantsuri, *On one mixed problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Vol. 140, 2006, pp.9–16.
- [4] R. Bantsuri, *Solution of the mixed problem of plate bending for a multi-connected domain with partially unknown boundary in the presence of cyclic symmetry*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Vol. 145, 2007, pp.9–22.
- [5] R. Bantsuri and Sh. Mzhavanadze, *The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Vol. 145, 2007, pp.23–33.
- [6] R. D. Bantsuri, *Some inverse problems of plane elasticity and of bending of thin plates*, In Continuum mechanics and related problems of analysis (Tbilisi, 1991), “Metsniereba”, Tbilisi, 1993, pp. 100–107.
- [7] R. D. Bantsuri and R. S. Isakhanov, *Some inverse problems in elasticity theory*, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR, Vol. 87, 1987, pp.3–20.
- [8] G. P. Cherepanov, *Inverse problems of the plane theory of elasticity*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 38, No. 6, 1975, pp.915–931.
- [9] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic problems of mathematical theory of elasticity*. (Russian), Nauka, Moscow 1966
- [10] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Dover Publications Inc., New York, 1992.
- [11] Keldysh M.V. and Sedov L.D., *The effective solution of some boundary problems for harmonic functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol.16, No.1, 1937, pp.7–10. (in Russian.)
- [12] H. Neuber, *The optimization of stresses concentracion. In Continuum mechanics and related problems of analysis*, Moscow,. Nauka, 1972, pp. 375–380.
- [13] N. Odishelidze and F. Criado-Aldeanueva, *A mixed problem of plane elasticity for a domain with a partially unknown boundary*, International Applied Mechanics, Vol. 42, No. 3, 2006, pp.342–349.
- [14] N. Odishelidze, F. Criado-Aldeanueva, *Some axially symmetric problems of the theory of plane elasticity with partially unknown boundaries*, Acta Mech., Vol. 199, 2008, pp.227–240.
- [15] N. Odishelidze, *Solution of the mixed problem of the plane theory of elasticity for a multiply connected domain with partially unknown boundary in the presence of axial symmetry*, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 146, 2008, pp.97–112.

[16] N. Odishelidze, F. Criado-Aldeanueva, *A mixed problem of plate bending for a doubly connected domains with partially unknown boundary in the presence of cycle symmetry*, Science China Physics, Mechanics and Astronomy. 2010, vol. 53, No 10, pp. 1884-1894

[17] S. B. Vigdergauz, *On a case of the inverse problem of the two-dimensional theory of elasticity*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 41, No. 5, 1977, pp.902–908.