ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

....

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ალგებრის ქვემიმართულება

გიორგი დეკანოიძე

თავისუფალი ჯგუფები და მრავალსახეობები

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა

დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი

მიხეილ ამაღლობელი

თბილისი

2015

სარჩევი

შესავალი

ქვეკლასებს, რომლებიც იგივური თანაფარდობებით გამოიყოფიან ყველა ჯგუფთა კლასში ეწოდება მრავალსახეობები. მაგალითად, აბელურ ჯგუფთა კლასი - მრავალსახეობაა, რომელიც გამოიყოფა იგივეობებით xy=yx. მრავალსახეობები მჭიდროდ არის დაკავშირებული თავისუფალ ჯგუფებთან, რადგან იგივეობები თავისუფალი ჯგუფების ელემენტებია. სამაგისტრო ნაშრომში შემოტანილია ამ თეორიის საწყისი ცნებები და დადგენილია, რომ მრავალსახეობები ემთხვევა იმ ჯგუფთა კლასებს, რომლებიც ჩაკეტილია ქვეჯგუფთა ჰომომორფულ ანასახთა და დეკარტულ ნამრავლთა მიმართ (ბირკგოფის თეორემა). ნაშრომში ამოხსნილია აგრეთვე რამდენიმე საინტერესო ამოცანა ბირკგოფის თეორემის ირგვლივ, კერძოდ მითითებულია ის ჯგუფთა კლასები, რომელშიც ცალ-ცალკეა დარღვეული ბირკგოფის თეორემის სამი პირობიდან ერთ-ერთი.

§ 1. ძირითადი განსაზღვრებები

ამბობენ, რომ G სიმრავლეზე განსაზღვრულია ბინარული ოპერაცია, თუ G-ს ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის ცალსახადაა განსაზღვრული ელემენტი a·b G-დან. ბინარული ოპერაცია შეიძლება აღინიშნოს არამარტო ·, არამედ ნებისმიერი სხვა სიმბოლოთი, მაგალითად +, *, ˚, ... ჩვეულებრივ წერენ ab-ს ნაცვლად a·b-სი. ოპერაციის ჩაწერას ·-ით ზოგჯერ უწოდებენ მულტიპლიკაციურ ჩაწერას, ხოლო ჩაწერას +-ით უწოდებენ ადიციურ ჩაწერას.

არაცარიელ G სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციით, ეწოდება ჯგუფი, თუ:

1) (ab)c=a(bc) ნებისმიერი a, b, c ელემენტებისათვის G-დან (ოპერაცია ასოციაციურია)
2) არსებობს ისეთი ელემენტი e G-დან (მას ეწოდება ერთეული), რომ ae=ea=a, ნებისმიერი a-სთვის G-დან
3) ნებისმიერი a-სათვის G-დან G-ში არსებობს ისეთი ელემენტი b (მას ეწოდება a-ს შებრუნებული), რომ ab=ba=e

ერთეულოვანი ელემენტის აღნიშვნისთვის იყენებენ აგრეთვე სიმბოლო 1-ს, თუ ოპერაცია აღინიშნება ·-ით და სიმბოლო 0-ს, თუ ოპერაცია აღინიშნება +-ით.
G ჯგუფს ეწოდება აბელური, ან კომუტაციური ჯგუფი, თუ ab=ba, ნებისმიერი a და b-სთვის G-დან.

G ჯგუფის |G| სიმძლავრეს ეწოდება G ჯგუფის რიგი. თუ ეს სიმძლავრე სასრულია, მაშინ G-ს ეწოდება სასრული ჯგუფი, წინააღმდეგ შემთხვევაში უსასრულო. სასრულ G ჯგუფს ეწოდება p-ჯგუფი, თუ |G| $=p^k$ რომელიღაც მარტივი p რიცხვისათვის და ნატურალური k≥1-სთვის.

ჯგუფში ასოციაციურობის გამო მისი ნებისმიერი $a_1, a_2, \dots, a_n$ ელემენტების ნამრავლი გარკვეული რიგით (ჯგუფური ოპერაციის შესაძლო არაკომუტაციურობის გამო) არ არის დამოკიდებული ფრჩხილების განლაგებაზე და შეიძლება ჩაიწეროს $a_1\, a_2 \dots\, a_n$ სახით.

a ელემენტის ტოლი n ელემენტის ნამრავლს ეწოდება a ელემენტის n-ური ხარისხი და აღინიშნება a^n-ით. a ელემენტის უარყოფითი ხარისხები შეიძლება განისაზღვროს, ან როგორც ამ ელემენტის დადებითი ხარისხების შებრუნებული ელემენტები ჯგუფიდან, ან როგორც a^{-1} ელემენტის ტოლი რამდენიმე ელემენტის ნამრავლი: $a^n = (a^{-1})^{-n}$, n<0.
შევთანხმდეთ, a ელემენტის ნულოვანი a^0 ხარისხის ქვეშ გვესმოდეს e ელემენტი: $a^0 = e$.
თუ $a^n = e$ რომელიმე n>0-სთვის, მაშინ ასეთ უმცირეს n-ს ეწოდება a ელემენტის რიგი და აღინიშნება |a|=n. აღვნიშნოთ, რომ $a^m = e \ \leftrightarrow$ m ყოფს n-ს.
თუ $a^n \ \neq e$ ნებისმიერი n>0-სთვის, მასინ ამბობენ, რომ a უსასრულო რიგის ელემენტია და

წერენ |a|=∞. G და G^* ჯგუფებს ეწოდებათ იზომორფული და წერენ G≈G^*, თუ არსებობს იზომორფიზმი φ:G→ G^*, ე.ი. ისეთი ურთიერთცალსახა φ ასახვა G ჯგუფიდან მთელ G^* ჯგუფზე, რომ φ(a,b)=φ(a)φ(b) ნებისმიერი a, b ელემენტებისთვის G-დან (ან $(ab)^{\varphi} = a^{\varphi} b^{\varphi}$, თუ a ელემენტის ანასახს φ ასახვის დროს ავღნიშნავთ a^{φ} სიმბოლოთი).

ჯგუფის მაგალითები. ნებისმიერი რგოლის ადიციური ჯგუფი, კერძოდ ℤ-მთელი რიცხვები, ℚ რაციონალური რიცხვები, ℝ ნამდვილი რიცხვები, ℂ კომპლექსური რიცხვები შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ნებისმიერი K ველის მულტიპლიკაციურია K^* ჯგუფი, კერძოდ $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

ჯგუფი $GL_n(K)$- ყველა n-ური რიგის შებრუნებად მატრიცთა ჯგუფი, რომლის ჯგუფური ოპერაცია არის მატრიცთა გამრავლების ოპერაცია; ეს ჯგუფი კომუტაციურია, როცა n≥2.

ნებისმიერი M სიმრავლის ჩამათა (ბიექციების) S(M) ჯგუფი. ჩვენთვის იქნება მნიშვნელოვანი n ელემენტიანი M={1,2,3,..,n} სიმრავლის ჩასმათა ჯგუფი, რომელსაც S_n-ით აღნიშნავენ.

ქვეჯგუფი ეს არის ჯგუფის ის არაცარიელი ნაწილი, რომელიც თვითონ არის ჯგუფი იმ ოპერაციის მიმართ, რომელიც განმარტებულია ჯგუფში. აღვნიშნოთ, რომ G ჯგუფის არაცარიელი ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ქვეჯგუფი, როცა ის ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნებული ოპერაციების მიმართ, ე.ი.

1. თუ x,y ∈ H, მაშინ xy ∈ H,
2. თუ x ∈ H, მაშინ $x^{-1} \in$ H,

და წერენ H ≤ G. თუ H ≤ G და H ≠ G, მაშინ წერენ H < G. ქვეჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს ციკლური ქვეჯგუფი, წარმოქმნილი a ელემენტით, ე.ი. a ელემენტის ყველა მთელი ხარისხების სიმრავლე $\langle a \rangle = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. აღვნიშნოთ, რომ თუ |a|=∞, მაშინ $\langle a \rangle$ იზომორფულია ℤ მთელ რიცხვთა რგოლის ადიციური ჯგუფის; თუ |a|=n, მაშინ $\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$ შედგება ზუსტად n ელემენტისგან და იზომორფულია n მოდულით ნაშთთა $\mathbb{Z}_n$ რგოლის ადიციური ჯგუფის.

სიმრავლით წარმოქმნილი ჯგუფი. ვთქვათ M არის G ჯგუფის ქვესიმრავლე, მაშინ M სიმრავლით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი ვუწოდოთ G ჯგუფის ყველა იმ ქვეჯგუფის თანაკვეთას, რომელიც M-ს მოიცავს და აღინიშნება $\langle M \rangle$-ით. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\langle M \rangle$ ემთხვევა ყველა შესაძლო $m_1^{\varepsilon_1} m_2^{\varepsilon_2} \ldots m_k^{\varepsilon_k}$ სახის ნამრავლთა სიმრავლეს, სადაც $m_i \in M$, $\epsilon_i = \pm 1$.

ამბობენ, რომ G ჯგუფი წარმოიქმნება M სიმრავლით, თუ G=$\langle M \rangle$. მაგალითად, S_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა (ij) ტრანსპოზიციათა სიმრავლით. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ S_n-

ის ყოველი ჩასმა წარმოიდგინება ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით. რადგან (ij)=(1i)(1j)(1i), ამიტომ S_n წარმოიქმნება (12)(13)..(1n) ტრანსპოზიციებითაც კი. ლუწ ჩასმათა ნისანცვლადი A_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა შესაძლო სამმაგი ციკლებით, რადგან ყოველი ლუწი ჩასმა არის ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვების ნამრავლი და

(ij)(ik)=(ijk), (ij)(kl)=(ilj)(jkl).

მოსაზღვრე კლასები. ვთქვათ G ჯგუფია, H მისი ქვეჯგუფი. განვიხილოთ G-ზე ექვივალენტობა შემდეგი წესით: $a \sim b \ \leftrightarrow a^{-1}b \in H.$ G ჯგუფი იშლება ექვივალენტობის კლასებად, რომელთაც ეწოდება მარცხენა მოსაზღვრე კლასები H ჯგუფის მიმართ. განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა იმ b ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც მოცემული a ელემენტის ექვივალენტურია (ე.ი. a-ს შემცველი კლასია), ემთხვევა $aH = \{ah|h \in H\}$ სიმრავლეს. ამგვარად, ეს სიმრავლე მიიღება H-ის მარცხნიდან a-ზე გამრავლებით. რადგან ოპერაცია ჯგუფში არ არის სავალდებულო იყოს კომუტაციური, ჩვენ, საძოგადოდ, მივიღებთ სხვა ექვივალენტობის მიმართებას, თუ ჩავთვლით, რომ $a \sim b \ \leftrightarrow ba^{-1} \in H.$ ამ შემთხვევაში მივიღებთ G-ს დაშლას მარჯვენა Ha მოსაზღვრე კლასებად. G ჯგუფის თავის თავზე $x \to x^{-1}$ ასახვას ყოველი aH მარცხენა მოსაზღვრე კლასი გადაჰყავს $(aH)^{-1} = H^{-1}a^{-1}$ მარჯვენა მოსაზღვრე კლასში a^{-1} წარმომდგენლით და ამგვარად გვაძლევს მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლის ბიექციას მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეზე. მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს, რომელიც ზემოთ დამტკიცებულის გამო ემთხვევა მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს, ეწოდება H ჯგუფის ინდექსი G ჯგუფში და აღინიშნება |G:H|-ით.

1.1. ლაგრანჟეს თეორემა. ვთქვათ G სასრული ჯგუფია, H მისი ქვეჯგუფი. მაშინ

$$|G|=|G : H| \cdot |H|.$$

■ეს თეორემა, ცხადია გამომდინარეობს იქედან, რომ ჯგუფი G არის H ქვეჯგუფის მიმართ არათანამკვეთ მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება, ხოლო ყოველ კლასში იმდენი ელემენტია, რამდენიც არის H-ში.■

ლაგრანჟის თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან შედეგს.

შედეგი 1. სასრულ ჯგუფში ყოველი ქვეჯგუფის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის რიგის გამყოფს.

შედეგი 2. სასრული ჯგუფის ყოველი a ელემენტის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის გამყოფს, რადგან ის ემთხვევა a-ს მიერ წარმოქმნილი $\langle a \rangle$ ქვეჯგუფის რიგს.

ჯგუფების ჰომომორფიზმი. G ჯგუფს G^* ჯგუფში φ ასახვას ეწოდება ჰომომორფული ასახვა (ან უბრალოდ ჰომომორფიზმი), თუ G ჯგუფის ნებისმიერი a, b ელემენტებისთვის

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$$

G ჯგუფის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს , რომლებიც აისახებიან φ-ს დროს G^* ჯგუფის ერთეულოვან ელემენტზე, ვუწოდოთ φ ჰომომორფიზმის ბირთვი და აღვნიშნოთ $Ker\ \varphi$-ით. განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $Ker\ \varphi$ G-ს ქვეჯგუფია.

ჰომომორფიზმის მაგალითია $GL_n(K) \to K^*$ ასახვა წესით $A \to detA$, სადაც K ველია, ამ მაგალითში ბირთვი წარმოადგენს ყველა იმ მატრიცის $SL_n(K)$ სიმრავლეს, რომელთა დეტერმინანტი ტოლია 1-ის.   ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფებია. ნებისმიერ $K \text{g}\ H = \{kgh | k \in \mathrm{K}, \mathrm{h} \in \mathrm{H}\}$ სიმრავლეს, სადაც $g \in G$, ეწოდება G ჯგუფის ორმაგი მოსაზღვრე კლასი K და H ქვეჯგუფების მიმართ. ყველა ასეთ კლასთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathrm{K} \setminus \mathrm{G}/\mathrm{H}$ სიმბოლოთი.

ორმაგი მოსაზღვრე კლასები

წინადადება. ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ქვეჯგუფებია. მაშინ

1) ნებისმიერი g-სთვის, $g \in G$, არსებობს ერთადერთი g-ს შემცველი ორმაგი მოსაზღვრე კლასი K და H ქვეჯგუფების მიმართ.

2) G იშლება არათანამკვეთ ორმაგ მოსაზღვრე კლასებად K და H-ის მიმართ.

3) ნებისმიერი $K\text{g}\,H$ ორმაგი მოსაზღვრე კლასი არის G-ს და H-ის მიმართ $| K{:}\, K \cap gHg^{-1} |$ სხვადასხვა მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება.

□ 1) აშკარაა, რომ $g = ege \in K\text{g}\,H.$ თუ g ეკუთვნის კიდევ ერთ $Kx\ H$ ორმაგ მოსაზღვრე კლასს, მაშინ $g = kxh$ რომელიღაც $k \in \mathrm{K}$, $h \in \mathrm{H}$ და ამიტომ $K\text{g}\,H = K(kxh)H = KxH.$

პუნქტი 2) უშუალოდ გამომდინარეობს პუნქტი 1)-დან.

2) K g H ორმაგი მოსაზღვრე კლასი არის k g H მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება, როცა k გაირბენს K-ს. ვთქვათ A არის ყველა ასეთი მარცხენა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლე, ხოლო B - ყველა K-ს $K \cap gHg^{-1}$ მიმართ ყველა მარცხენა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლე.

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\varphi : A \to B$ ასახვა, განსაზღვრული $k\ \text{g}\ H \mapsto k(K \cap gHg^{-1})$, სადაც $k \in \mathrm{K}$, არის ბიექცია. ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება კორექტულია და φ ასახვა ურთიერთცალსახაა. ვთქვათ $k_1, k_2 \in \mathrm{K}$. მაშინ

$$k_1gH = k_2gH \Leftrightarrow g^{-1}k_1^{-1}k_2g \in H \Leftrightarrow k_1^{-1}k_2 \in K \bigcap gHg^{-1} \Leftrightarrow k_1(K \bigcap gHg^{-1}) = k_2(K \bigcap gHg^{-1}).$$

აშკარაა ის, რომ φ – „ზე“ ასახვაა. □

თეორემა. ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ქვეჯგუფებია. ვთქვათ X და G-ს K და H-ის მიმართ ორმაგი მოსაზღვრე კლასების წარმომადგენელთა სრული სისტემა (თითო-თითო ყოველი კლასიდან). მაშინ

$$|\mathrm{G} : \mathrm{H}| = \sum_{x \in \mathrm{X}} \left| K : K \bigcap xHx^{-1} \right| \tag{1}$$

□ G ჯგუფი იშლება KxH ორმაგ მოსაზღვრე კლასებად $x \in \mathrm{X}$ წარმომადგენლებით. ყოველი მათგანი იშლება $|K: K \cap xHx^{-1}|$ რაოდენობა G H-ის მიმართ მარცხენა მოსაზღვრე კლასებად. □

ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლი: რამდენიმე $G_1, \ \cdots, G_n$ ჯგუფიდან შეიძლება ავაგოთ $G = G_1 \times \ \cdots \times \ G_n$ ჯგუფი, რომელიც შედგება $(g_1, \ ..., g_n)$ მიმდევრობებისაგან , სადაც $g_i \in G_i$, $(g_1, \ ..., g_n) \cdot (g_1', \ ..., g_n') = (g_1g_1', \ ..., g_ng_n')$ გამრავლების ოპერაციით. ამ ჯგუფს $G_1, \ \cdots, G_n$ ჯგუფების **პირდაპირ ნამრავლს** უწოდებენ. მის ერთეულს წარმოადგენს $(e_1, \ ..., e_n)$ ელემენტი, სადაც e_i არის G_i ჯგუფის ერთეული.

ვთქვათ $U_i = \{(e_1, ..., e_{i-1}, g, e_{i+1}, \ ..., \ e_n \mid g \in G_i\}$. მაშინ U_i G ჯგუფის ქვეჯგუფია, რომელიც G_i ჯგუფის იზომორფულია და სრულდება ფორმულები:

$$G = < \bigcup_{i=1}^{n} U_i > \tag{1}$$

$$U_i \trianglelefteq G \tag{2}$$

$$U_i \cap < \bigcup_{j \neq i} U_j > = \{1\} \text{ ყველა } i\text{-სთვის.}$$

თეორემა. ვთქვათ G ჯგუფია, $U_1, \ ..., U_n$ - მისი ისეთი ქვეჯგუფები, რომ სრულდება (3) – (5) ფორმულები. მაშინ G$\cong U_1 \times \ ... \times U_n$.

□ ვთქვათ $a \in U_i, b \in U_j, i \neq j$. მაშინ $a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in U_i \cap U_j$ და მაშასადამე $ab = ba$. (3)-ისა და დამტკიცებული გადანაცვლებადობის გამო, ყოველი $g \in G$ ელემენტი შეიძლება ჩავწეროთ $g = u_1 \ldots u_n$ სახით, სადაც $u_i \in U_i$. ეს ჩაწერა ცალსახაა: თუ $g = u_1' \cdots u_n'$, სადაც $u_i' \in U_i$, მაშინ კვლავ გადანაცვლებადობის გამოყენებით მივიღებთ

$(u_1^{'})^{-1}u_1 = u_2^{-1}u_2^{'} \cdots u_n^{-1}u_n^{'}$. (5)-ის გამო აქედან გამომდინარეობს, რომ $u_1' = u_1$.

ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ $u_i = u_i'$ ყველა $i = 1, \cdots, n$. ეს საშუალებას იძლევა განვმარტოთ ასახვა $\varphi : G \to U_1 \times \cdots \times U_n$ წესით: $\varphi(g) = (u_1 \dots u_n)$, თუ $g = u_1 \dots u_n$, $u_i \in U_i$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ φ იზომორფიზმია. □

თუ სრულდება ამ თეორემის პირობები, მაშინ ამბობენ, რომ G ჯგუფი იშლება თავისი $U_1, \ . \ . \ . \ , U_n$ ქვეჯგუფების პირდაპირ ჯამად.

ამოცანა1. ნებისმიერი 6 რიგის ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}_6$-ის ან S_3-ის.

ამოხსნა. ვთქვათ G 6 რიგის სასრული ჯგუფია, H - მისი სილოვის 2-ქვეჯგუფი, F - მისი სილოვის 3-ქვეჯგუფი, აშკარაა, რომ $F \trianglelefteq G$. თუ $H \trianglelefteq G$, მაშინ $G \cong H \times F \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. თუ $H \ntrianglelefteq G$, მაშინ $\bigcap_{x \in G} xHx^{-1} = \{1\}$ და კელის თეორემის თანახმად $G \cong S_3$.

ამოცანა2. თუ n, m თანამარტივი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $\mathbb{Z}_{nm} \subseteq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

ამოხსნა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ სასრული ციკლური $< a >$ ჯგუფის r რიგი იშლება ორ თანამარტივ ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლად,

$$r = nm, \quad (n, m) = 1,$$

მაშინ $< a >$ ჯგუფი იშლება ორ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებსაც აქვთ, შესაბამისად, n და m რიგი.

$< a >$ ჯგუფისათვის გამოვიყენებთ ადიციურ ჩაწერას. თუ დავუშვებთ $b = ma$, მაშინ

$$nb = (nm)a = ra = 0,$$

მაგრამ $0 < k < n$-სთვის

$$kb = (km)a \neq 0,$$

ე.ი. ციკლურ $< b >$ ქვეჯგუფს აქვს n რიგი. ანალოგიურად $c = na$ ელემენტის ციკლურ $< c >$ ქვეჯგუფს აქვს m რიგი. $< b > \cap < c >$ თანაკვეთა შეიცავს მხოლოდ ნულს, ვინაიდან $kb = lc$, როცა $0 < k < n, 0 < l < m$, მაშინ

$$(km)a = (\ln)a$$

საიდანაც, ვინაიდან km და $\ln$ რიცხვები ნაკლებია r-ზე,

$$km = \mathrm{l}m,$$

რაც შეუძლებელია n და m რიცხვების თანამარტივობის გამო. ბოლოს, არსებობს ისეთი u და v რიცხვები, რომ

$$nu + mv = 1$$

ამიტომ

$$a = v(ma) + u(na) = vb + uc$$

და მაშასადამე, $< a >$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოიდგინოს როგორც $< b >$ და $< c >$ ქვეჯგუფების ელემენტების ჯამი.

სასრულ ციკლურ ჯგუფს, რომლის რიგი არის მარტივი p რიცხვის რაღაც ხარისხი ეწოდება **პრიმარული ციკლური** ჯგუფი, რომელიც მიეკუთვნება მარტივ p რიცხვს. ამოცანა 6.3-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სასრული ციკლური ჯგუფი იშლება პრიმალურ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ნამრავლად.

თეორემა. ყოველი სასრულ წარმომქმნელიანი აბელური ჯგუფი იშლება სასრულ რაოდენობა უსასრულო ციკლური ჯგუფებისა და პრიმალურ ციკლური ჯგუფების პირდაპირ ნამრავლად. უსასრულო ციკლური ჯგუფების რაოდენობა დაპრიმარული ციკლური ჯგუფების რიგების ერთობლივობა ერთი და იგივეა ნებისმიერ ასეთ დაშლაში.

ამ თეორემის დამტკიცება, აგრეთვე ცნობები ნილპოტენტურ და ამოხსნად ჯგუფებზე, რომლებიც აზოგადებს აბელურ ჯგუფებს, არის მაგალითად, წიგნში [??]. ჩვენ არ ვეხებით ამ მნიშვნელოვან თემებს, რადგან ჩვენი მიზანია გავეცნოთ მარტივი სასრული ჯგუფების ზოგიერთ არატრივიალურ მაგალითს.

ჯგუფის მოქმედება სიმრავლეზე. ვთქვათ G ჯგუფია, M - რაიმე სიმრავლე. ამბობენ, რომ ჯგუფი G მოქმედებს M სიმრავლეზე, თუ მოცემულია ჰომომორფიზმი $\varphi: G \to S(M)$.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, G ჯგუფის M სიმრავლეზე მოქმედების მოცემა ნიშნავს, რომ G-ს ყოველ a ელემენტს ეთანადება გარდაქმნა $a\varphi \in S(M)$ ისე ,რომ

$$(a \cdot b)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$$

ჰომომორფიზმების ზოგადი თვისების თანახმად G ჯგუფის ერთეულს e -ს შეესაბამება იგივური გარდაქმნა $e\varphi = \mathrm{id}\, M$, ხოლო შებრუნებულ ელემენტს - შებრუნებული გარდაქმნა.

$a\varphi$ გარდაქმნის გამოყენების შედეგი $m(a\varphi)$ 'წერტილზე' $m \in M$ სიმოკლისათვის აღინიშნება ma $-$თი. თვისება $(*)$ გადაიწერება 'ასოციაციურობის' სახით:

$$m(ab) = (ma)b$$

ნებისმიერი $m \in M$, $a, b \in G$ და $me = m$ ყველა $m \in M$.

ამბობენ, რომ ჯგუფი G მოქმედებს M-ზე ზუსტად, თუ φ არის ჩადგმა.

მაგალითი. ვთქვათ G ჯგუფია. მაშინ ოველი $a \in G$ ელემენტს შევუსაბამოთ $\hat{a}$ ჩასმა G-ზე, რომელსაც გადაყავს $g \in G$ ელიემენტი ga-ში (G-ს მარჯვენა a-თი). ჩვენ ვღებულობთ ჯგუფ G-ს მოქმედებას თავის თავზე . ეს მოქმედება ზუსტია, რადგან $ga = gb \leftrightarrow a = b$.

1.2 წინადადება. ნებისმიერი სასრული G ჯგუფი შეიძლება ჩავდგათ S_n ჯგუფში, სადაც

$n = |G|$.

ვთქვათ G ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე და $m \in M. m$ ელემენტით წარმოქმნილი ორბიტა ვუწოდოთ სიმრავლეს

$$mG = \{mg | g \in G\}.$$

შევნიშნოთ, რომ ორბიტა წარმოიქმნება ნებისმიერი თავისი ელემენტით. მართლაც, (mg)G=m(gG)=mG

1.3 წინადადება. M სიმრავლე იშლება თავის არათანამკვეთ ორბიტათა გაერთიანებად.

■ ვთქვათ ორი m_1G და m_2G ორბიტები იკვეთება და m მათი საერთო ელემენტია. რადგან ორბიტა წარმოიქმნება ნებისმიერი თავისი ელემენტით ამიტომ $mG = m_1G$ და $mG = m_2G$, საიდანაც $m_1G = m_2G$. ■

ამბობენ, რომ G ჯგუფი მოქმედებს M-ზე ტრანზიტულად, თუ ორბიტა მხოლოდ ერთია, ე.ი. ნებისმიერი $m_1, m_2 \in M$ -სთვის არსებობს $g \in G$ ისეთი, რომ $m_1g = m_2$. მაგალითისათვის, როცა $n \geq 3$, ლუწ ჩასმათა A_n ჯგუფი ტრანზიტულად მოქმედებს {1, 2, .., n} სიმრავლეზე, რადგან სიმბოლოთა ნებისმიერი i, j წყვილისათვის მოიძებნება ისეთი ლუწი ჩასმა, კონკრეტულად (i j k) სამმაგი ციკლი, რომელსაც i გადაჰყავს j-ში. თუ G ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე, მაშინ $m \in M$ ელემენტის სტაბილიზატორი ვუწოდოთ სიმრავლეს $St_G(m) = \{h \in G | mh = m\}$. ცხადია, რომ სტაბილიზატორი არის G-ს ქვეჯგუფი.

1.4. წინადადება. mG ორბიტის სიმზლავრე თანხვდება $St_G(m)$ სტაბილიზატორის ინდექსს G ჯგუფში.

■ განვიხილოთ G ჯგუფის σ ასახვა mG სიმრავლეზე შემდეგი წესით:$g\sigma = mg$. ვთქვათ, $H = St_G(m)$. აღვნიშნოთ, რომ $a\sigma = b\sigma \leftrightarrow ma = mb \leftrightarrow m = m(ba^{-1}) \leftrightarrow ba^{-1} \in H \leftrightarrow b \in Ha$. ეს იმას ნიშნავს, რომ σ ასახვის დროსერთ ელემენტზე აისახება ზუსტად მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი H-ის მიმართ. ამგვარად, მარჯვენა მოსაზღვრე კლასთა სიმრავლის სიმძლავრე თანხვდება mG ორბიტის სიმძლავრეს. □

შედეგი: თუ G სასრული ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე, მაშინ ნებისმიერი ორბიტის ელემენტთა რიცხვი ყოფს ჯგუფის რიგს.

განვიხილოთ G ჯგუფის თავის თავზე შეუღლებით მოქმედების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი. $a \in$ G ელემენტს შევუსაბამოთ ასახვა $\hat{a}$: G $\rightarrow$ G წესით: $x \mapsto a^{-1}\, x\, a.$ მოხერხებულობისთვის მომავალში ელემენტი $a^{-1}\, x\, a$ აღვლიშნოთ x^a სიმბოლოთი. ამ აღნიშვნას აზრი აქვს, რადგან სრულდება შემდეგი ფორმულები: $(x^a)^b$=x^{ab},

$(xy)^a = x^a y^a$. ამ მოქმედებისას ორბიტა x წარმომადგენლით შეადგენს $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ სიმრავლეს და მას ეწოდება **შეუღლებულ ელემენტთა კლასი**.

1.5. წინადადება. G ჯგუფი იშლება შეუღლებულ ელემენტთა არათანამკვეთ კლასებად და თუ ჯგუფი სასრულია, მაშინ თითოეულ კლასში ელემენტთა რიცხვი ყოფს G ჯგუფის რიგს.

მაგალითის სახით აღვწეროთ ჩასმათა S_n ჯგუფის შეუღლებულ ელემენტთა კლასები. ვთქვათ, $a \in S_n$. განვიხილოთ a-სთან შეუღლებული a^x ჩასმა. განვიხილოთ a ჩასმის დაშლა დამოუკიდებელ ციკლებად: a=($\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$)($\beta_1\beta_2 \dots \beta_l$)…. ჩასმა x წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი სახით

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k & \beta_1\beta_2 \dots \beta_l & \dots \\ \alpha_1{}'\alpha_2{}' \dots \alpha_k{}' & \beta_1{}'\beta_2{}' \dots \beta_l{}' & \dots \end{pmatrix}.$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ $a^x = x^{-1}\, ax = (\alpha_1{}'\alpha_2{}' \dots \alpha_k{}')(\beta_1{}'\beta_2{}' \dots \beta_l{}') \dots$. სხვა სიტყვებით, a^x მიიღება a-სგან მის ციკლებში იმ სიმბოლოების შეცვლით, რომლებშიც ისინი გადაჰყავს x ჩასმას. ასე რომ a და a^x ჩასმებს გააჩნიათ ერთნაირი ციკლური აგებულება, ე.ი. მათ დამოუკიდებელ ციკლებად დაშლაში არის ტოლი სიგრძის ციკლების ტოლი რაოდენობა. პირიქით, თუ a=$(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k)$ $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_l)$ …, b = $(\alpha_1{}'\alpha_2{}' \dots \alpha_k{}')$ $(\beta_1{}'\beta_2{}' \dots \beta_l{}')$ … - ერთნაირი ციკლური წყობის ორი ჩასმაა, მაშინ b მიიღება a-სგან $x = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k & \beta_1\beta_2 \dots \beta_l & \dots \\ \alpha_1{}'\alpha_2{}' \dots \alpha_k{}' & \beta_1{}'\beta_2{}' \dots \beta_l{}' & \dots \end{pmatrix}$ ჩასმით შეუღლების შედეგად.

ამგვარად, S_n-ში შეუღლებულ ელემენტთა კლასი არის ერთნაირი ციკლური აგებულების ჩასმათა სიმრავლე.

≥ნორმალური ქვეჯგუფები. ვამბობთ, რომ H ქვეჯგუფი არის G ჯგუფის **ნორმალური ქვეჯგუფი** ან G ჯგუფის **ნორმალური გამყოფი** და ვწერთ H ⊴ G, თუ სრულდება შემდეგი ორი ექვივალენტური პირობა:

1) H ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარჯვენა და მარცხენა მოსაზღვრე კლასები ემთხვევა, ე.ი.

$$xH = Hx \text{ ყველა } x \in G\text{-სთვის}$$

2) H ქვეჯგუფი ჩაკეტილია შეუღლების მიმართ, ე.ი.

$$h \in H,\ x \in G \Rightarrow h^x \in H.$$

თუ $H \trianglelefteq G$ - საკუთრივი ქვეჯგუფია, მაშინ ვწერთ $H \triangleleft G$.

G ჯგუფს ეწოდება **მარტივი**, თუ მასში არ არის არაერთეულოვანი საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფები.

□ დავამტკიცოთ მოყვანილი პირობების ექვივალენტურობა. 1) ⇒ 2), რადგან $xH = Hx$ ტოლობა ტოლფასია $x^{-1}\,Hx = H$ ტოლობის.

ვთქვათ, ადგილი აქვს 2) პირობას. ეს ნიშნავს, რომ სრულდება ჩართვა $x^{-1}\,Hx \subseteq H$, $\forall x \in G$, მაგრამ მაშინ სრულდება აგრეთვე ჩართვა $(x^{-1})^{-1}\,Hx^{-1} \subseteq H$, ე.ი. $xHx^{-1} \subseteq H$. მარცხნიდან x^{-1}-ზე და მარჯვნიდან x-ზე გამრავლების შედეგად ვღებულობთ $H \subseteq x^{-1}\,Hx$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $H = x^{-1}\,Hx$, ე.ი. სრულდება 1) პირობა. □

ნორმალური ქვეჯგუფის მაგალითია $\varphi : G \to G^*$ ჰომომორფიზმის ბირთვი, რადგან, თუ $H = Ker\varphi$ და $h \in H$, მაშინ $(x^{-1}hx)\varphi = (x\varphi)^{-1}(h\varphi)(x\varphi) = (x\varphi)^{-1} * 1 * (x\varphi) = 1$, საიდანაც $h^x \in H$.

ვთქვათ X, Y – G ჯგუფის ქვესიმრავლეებია. განვიხილოთ მათი ნამრავლი

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

თუ A და B ქვეჯგუფებია, მაშინ $A^2 = A$, ხოლო AB სიმრავლე ყოველთვის ქვეჯგუფი არ არის. მაგალითისათვის განვიხილოთ ქვეჯგუფები S_3-ში: $A = \{e, (12)\}, B = \{e, (13)\}$.

ამბობენ, რომ ქვეჯგუფი A ახდენს B-ს **ნორმალიზებას**, თუ $B^a = B$ (ან, რაც იგივეა, $B^a \subseteq B$) ყველა $a \in A$-სთვის.

1.6. ლემა. ვთქვათ A, B G ჯგუფის ქვეჯგუფებია და A ახდენს B-ს ნორმალიზებას (ან B ახდენს A -ს ნორმალიზებას). მაშინ სიმრავლე AB - ქვეჯგუფია.

□ საჭიროა შევამოწმოთ, რომ AB სიმრავლე ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნებული ელემენტის აღების მიმართ. ვთქვათ $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$, გვაქვს $(ab)(a_1 b_1) = aa_1(a_1^{-1}ba_1)b_1 \in AB$, რადგან $a_1^{-1}ba_1 \in B$. ანალოგიურად, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}(ab^{-1}a^{-1}) \in AB$, რადგან $ab^{-1}a^{-1} \in B$. □

ფაქტორ - ჯგუფები. ვთქვათ G ჯგუფია, H - მისი ქვეჯგუფი. ჩვენ ვიცით, რომ G ჯგუფი იშლება მარცხენა მოსაზღვრე კლასებად H ქვეჯგუფის მიმართ. მაშინ შეიძლება განვიხილოთ ფაქტორ-სიმრავლე, რომლის ელემენტებია ას კლასები. გვინდა ამ ფაქტორ-სიმრავლეზე ჯგუფის სტრუქტურის შემოტანა. თურმე ამის გაკეთება ბუნებრივი გზით შესაძლებელია

მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა H ქვეჯგუფი ნორმალურია G-ში. შემოვიტანოთ შესაბამისი განმარტება.

ვთქვათ $H \trianglelefteq G$. G / H-ით აღვნიშნოთ H-ის მიმართ მარცხენა (მარჯვენა) მოსაზღვრე კლასების სიმრავლე. განვიხილოთ ორი aH და bH მოსაზღვრე კლასების ნამრავლი $(a\mathrm{H}) * (b\mathrm{H})$, როგორც ქვესიმრავლეთა ნამრავლი ჯგუფში. გვაქვს, $(a\mathrm{H}) * (b\mathrm{H}) = a(\mathrm{H}\, b)\mathrm{H} = a(b\ \mathrm{H})\mathrm{H} = \mathrm{ab} * \mathrm{H} * \mathrm{H} = \mathrm{abH}$. ჩვენ მივიღეთ კვლავ მოსაზღვრე კლასი. მაშასადამე, a და b წარმომადგენლებიანი ორი aH და bH მოსაზღვრე კლასების ნამრავლი წარმოადგენს abH მოსაზღვრე კლასს ab წარმომადგენლით. ამგვარად, ჩვენ განვსაზღვრეთ გამრავლების ოპერაცია G / H სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ, რომ ამასთან სრულდება ჯგუფის განმარტებაში შემავალი ყველა მოთხოვნა. მართლაც, მოსაზღვრე კლასთა გამრავლების ასოციაციურობა გამომდინარეობს ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების ასოციაციურობიდან. ერთეულის როლს ასრულებს თვითონ H ნორმალური გამყოფი, რომელიც წარმოადგენს G-ს დაშლის ერთ-ერთ მოსაზღვრე კლასს H-ის მიმართ: სახელდობრ, ნებისმიერი a -სთვის G-დან გვექნება $aH * H = aH,\ \ H * aH = aHH = aH$. ბოლოს მოსაზღვრე aH კლასისათვის შებრუნებული იქნება მოსაზღვრე $a^{-1}H$ კლასი, ვინაიდან $aH * a^{-1}H = 1 * H = H$. ჩვენ მიერ აგებულ

G / H ჯგუფს ეწოდება G ჯგუფის **ფაქტორ-ჯგუფი** H ნორმალური გამყოფის მიმართ.

ვთქვათ, ახლა H არის G ჯგუფის ნებისმიერი ნორმალური გამყოფი. თუ G ჯგუფის ყოველ a ელემენტს თანადობაში მოვუყვანთ H ნორმალური გამყოფის მიმართ იმ მოსაზღვრე aH კლასს, რომელშიც მოთავსებულია ეს ელემენტი, მივიღებთ G ჯგუფის ε ასახვას მთელს G / H ფაქტორ-ჯგუფზე. G / H ჯგუფში გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ასახვა იქნება ჰომომორფული. მიღებულ ε ჰომომორფიზმს ეწოდება **ბუნებრივი** ჰომომორფიზმი G / H ფაქტორ-ჯგუფზე. ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი არის თვითონ H ნორმალური გამყოფი:

$$Ker\varepsilon = \{\, a \in \mathrm{G} | a\varepsilon = \mathrm{H}\} = \{\, a \in \mathrm{G} | a\mathrm{H} = \mathrm{H}\} = \{\, a \in \mathrm{G} | a \in \mathrm{H}\} = \mathrm{H}.$$

ბოლოს მოვიყვანოთ საყოველთაოდ მიღებული ტერმინოლოგია. $\varphi\colon \mathrm{G} \to G'$ ჰომომორფიზმს ეწოდება ეპიმორფიზმი, თუ მისი ანასახი G'-ის ტოლია.

ჰომომორფიზმს ეწოდება მონომორფიზმი (ან **ჩადგმა**), თუ მისი ბირთვი ერთეულოვანია. G ჯგუფი იდგმება G' ჯგუფში, თუ არსებობს G-ს ჩადგმა G'-ში. ცხადია, რომ იზომორფიზმი არის ერთდროულად ეპიმორფიზმი და მონომორფიზმი.

1.7. თეორემა ჰომომორფიზმის შესახებ.

1) ვთქვათ $H \trianglelefteq G$, $\varepsilon \to G / H$ - ბუნებრივი ეპიმორფიზმია, A - ქვეჯგუფია G-დან, მაშინ $A\varepsilon = A\, H / H$.

2) ვთქვათ $\varphi : G \to G'$ - ჯგუფთა ეპიმორფიზმია , $H = Ker\ \varphi$, $\varepsilon : G \to G / H$ - ბუნებრივი ეპიმორფიზმი. მაშინ არსებობს ეპიმორფიზმი τ ისეთი, რომ $\varphi = \varepsilon\tau$, ე.ი. კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & G' \\
& G / H \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

□ 1) განმარტების თანახმად $A\varepsilon = \{\, aH\ a \in A\}$. AH (რადგან A ახდენს H-ის ნორმალიზებას) არის ქვეჯგუფი, რომელიც შეიცავს H ნორმალურ ქვეჯგუფს და ფაქტორ-ჯგუფი $A\ H\ /\ H$ შედგება ზუსტად $(ah)H = a(hH) = aH$ სახის კლასებისაგან.

2) განვმარტოთ $\tau : G\ /\ H \to G'$ იზომორფიზმი წესით: $(aH)\tau = a\varphi$. შევნიშნოთ, რომ განმარტება კორექტულია, ე.ი. ის არ არის დამოკიდებული მოცემული კლასის a წარმომადგენელზე. მართლაც, თუ ავიღებთ სხვა ah წარმომადგენელს, გვექნება $(ah)\varphi = a\varphi * h\varphi = a\varphi$. გასაგებია, რომ τ არის „ზე“ ასახვა, ის არის ჰომომორფიზმი, რადგან $((aH)\ *\ (bH))^{\tau} = (abH)\tau = (ab)\varphi = a\varphi * b\varphi = (aH)\tau * (bH)\tau$. ვთქვათ, ორი aH და bH კლასების ანასახები ემთხვევა: $(aH)\tau = (bH)\tau$. ეს ნიშნავს, რომ $a\varphi = b\varphi$. მაშინ $(a^{-1}b)\varphi = 1$, ე.ი. $a^{-1}b \in H$. ბოლო ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ $aH = bH$. ამგვარად, τ - იზომორფიზმია. $\varphi = \varepsilon\tau$ ტოლობას ვამოწმებთ უშუალოდ: $a(\varepsilon\tau) = (a\varepsilon)\,\tau = (aH)\tau = a\varphi$. □

შედეგი 1. ვთქვათ $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ ეპიმორფიზმია, $\mathrm{G}' \geq A' \trianglerighteq B'$, A და B შესაბამისად A'-ს და B'-ს სრული წინა სახეებია . მაშინ $A \trianglerighteq B$ და $A/B \cong A'/B'$.

□ ვთქვათ, φ-ს A-ზე შეზღუდვა არის φA , $\tau: A' \to A'/B'$ ბუნებრივი ეპიმორფიზმია. განვიხილოთ ეპიმორფიზმი $\varphi A^{\tau}: A \to A'/B'$. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი ბირთვი B-ს ტოლია. მაშინ თეორემის თანახმად

$$A/B \cong A'/B'. \square$$

შედეგი 2. ვთქვათ $A \leq G, H \trianglelefteq G$. მაშინ

$$A/A \cap H \cong AH/H.$$

□ დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ბუნებრივი $\varepsilon : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/H$ ეპიმორფიზმი და მისი A-ზე შეზღუდვა. რადგან $Ker\varepsilon = \mathrm{H}$, ამიტომ $Ker\varepsilon_A = A \cap H$. თეორემის თანახმად A-ს ანასახი AH/H -ის ტოლია. ასე რომ ε_A იძლევა $A \to AH/H$ ეპიმორფიზმს $A \cap H$ ბირთვით. თეორემის 2) პუნქტის თანახმად ვღებულობთ: $A/A \cap H \cong AH/H$. □

§ 2. თავისუფალი ჯგუფები

ნებისმიერი მოცემული G ჯგუფის წარმომქმნელთა M სიმრავლის ელემენტები შეიძლება იყვნენ დაკავშირებული თანაფარდობებით G-ში. ე.ი. თვით ამ ელემენტების და მათივე შებრუნებულების ნამრავლები შეიძლება აღმოჩნდნენ ერთეულის ტოლი G-ში. მაგალითად: $xx^{-1} = e$, $x^{-1}x = e$ ნებისმიერი x-სთვის M-დან. ისინი, როგორც აქსიომების შედეგები გარდაუვალია ნებისმიერ ჯგუფში და ამიტომ ეწოდებათ ტრივიალური. თურმე არსებობენ ჯგუფები, რომლებშიც მათ წარმომქმნელთა რომელიღაც სიმრავლეში არ არსებობენ არატრივიალური თანაფარდობები - „თავისუფალი თანაფარდობებისაგან". ამ პარაგრაფის მიზანია ასეთი ჯგუფების კონსტრუქციის შესწავლა და დავამტკიცოთ, რომ ისინი „თავისუფალი" ჯგუფებია ყველა ჯგუფთა კლასში შემდეგი განსაზღვრების აზრით.

განსაზღვრება. ვთქვათ L ჯგუფთა რომელიღაც კლასია. ამბობენ, რომ ჯგუფი $F = F(X) = \langle x_i \mid i \in I\rangle$ თავისუფალი ჯგუფია L კლასში. თავისუფალ წარმომქმნელთა $X = \{x_i \mid i \in I\}$ სიმრავლით, თუ ნებისმიერი $G \in L$ ჯგუფისთვის წარმომქმნელთა $\{g_i \mid i \in I\}$ სიმრავლით $x_i \to g_i$ ასახვა გრძელდება $F \to G$ ჰომომორფიზმამდე.

სიმრავლე I-ს სიმძლავრეს ეწოდება თავისუფალი ჯგუფის (თავისუფლების) ხარისხი, ხოლო თვით $X = \{x_i \mid i \in I\}$ სიმრავლეს F(X)-ის ბაზისი. არსებობს უამრავი ჯგუფთა კლასი, რომლებსაც არ გააჩნიათ თავისუფალი ჯგუფები, მაგრამ ყველა ჯგუფთა კლასში არსებობენ და აქვთ კარგი აღწერა (ამით აიხსნება, კერძოდ, ტერმინი „თავისუფალის" წარმოშობა).

ვთქვათ I სიმრავლეა. როგორ G ჯგუფსაც არ უნდა ვიხილავდეთ, $X = \{x_i \mid i \in I\}$ წარმომქმნელებით, მისი ელემენტები წარმოიდგინება $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, სიტყვების სახით, ხოლო მათი ნამრავლი მეორეს პირველთან მარჯვნიდან მიწერით. ეს მიუთითებს კონსტრუქციის იდეას: საჭიროა თვით სიტყვები $X = \{x_i\,,\ x_i^{-1} \mid i \in I\}$ სიმბოლოების მიმართ $x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, ტიპის ქვესიტყვების გარეშე, გამოვაცხადოთ ჯგუფის ელემენტებად, ხოლო ერთის მეორესთან მიწერა ასეთი ქვესიტყვების ამოშლის შემდეგ -გამრავლებად. უფრო ზუსტად, დავაფიქსიროთ სიმბოლოთა ორი სიმრავლე $X = \{x_i \mid i \in I\}$ და $X^{-1} = \{x_i^{-1} \middle| i \in I\}$. .

სიტყვა X ალფავიტში - ეს ცარიელი (აღნიშვნა 1) ან $X \cup X^{-1}$-დან სიმბოლოთა სასრული მიმდევრობაა. ამ მიმდევრობის ელემენტთა რაოდენობას ეწოდება სიტყვის სიგრძე. სიტყვას ეწოდება კვეცადი, თუ ის შეიცავს $x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, სახის მეზობელ სიმბოლოებს. მაგალითად სიტყვებიდან $x_2 x_1 x_1 x_2^{-1} x_3$, $x_1 x_2 x_2^{-1} x_3$ პირველი უკვეცია, ხოლო მეორე კვეცადი.

ვიტყვით, რომ ორი u და v სიტყვა ეკვივალენტურია (სიმბოლოებში: $u \sim v$), თუ v შეიძლება მივიღოთ u-სგან $x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$ სიტყვათა სასრული რიცხვის ჩადგმით ან შეკვეცით. ცხადია, რომ ეს მიმართება რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია. ყველა u-ს

ექვივალენტური სიტყვა ქმნის ექვივალენტურ სიტყვათა კლასს, რომელიც აღინიშნება [u] სიმბოლოთი.

თეორემა 2.2. ვთქვათ $X = \{x_i \mid i \in I\}$. X ალფავიტში ექვივალენტურ სიტყვათა კლასების F(X) სიმრავლეზე განვსაზღვროთ გამრავლება $[u][v] = [uv]$. ეს განსაზღვრება არ არის დამოკიდებილი წარმომადგენელთა შემთხვევით არჩევაზე. F(X) სიმრავლე ამ გამრავლების მიმართ ჯგუფია.

დამტკიცება. ა) ექვივალენტურ სიტყვათა ნებისმიერი კლასი შეიცავს ერთადერთ უკვეც სიტყვას. მართლაც, ვთქვათ $\rho(u)$ აღნიშნავს იმ უკვეც სიტყვას, რომელიც მიიღება u-სგან ყველა მარჯვენა $x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon}$ სახის ქვესიტყვათა მიმდევრობითი ამოშლის შედეგად. ფუნქცია ρ-ს გააჩნია შემდები თვისებები (ნიშანი ≡ აღნიშნავს სიტყვათა გრაფიკულ ტოლობას):

$$\rho(u) \sim u, \tag{1}$$

$$\rho(u) \equiv u, \text{ თუ } u \text{ უკვეცია}, \tag{2}$$

$$\rho(uv) \equiv \rho(u\rho(v)) \tag{3}$$

$$\rho(x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon} u) \equiv \rho(u), \text{ როცა } \varepsilon = \pm 1 \tag{4}$$

$$\rho(u x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon} v) \equiv \rho(uv), \text{ როცა } \varepsilon = \pm 1 \tag{5}$$

$$\rho(uv) \equiv \rho(\rho(u)\rho(v)) \tag{6}$$

თვისებები (1), (2), (3) უშუალოდ გამომდინარეობზენ ρ-ს განსაზღვრებიდან, (4) ფორმულა გამომდინარეობს (3)-დან, ფორმულა (5) გამომდინარეობს (3) და (4)-დან, ფორმულა (6) გამომდინარეობს (3), (4) და (5)-დან ინდუქციით u-ს სიგრძის მიმართ. ვთქვათ ახლა $u \sim v$, სადაც u და v უკვეცი სიტყვებია. განსაზღვრების თანახმად არსებობს სიტყვათა

$$u = u_1, \qquad u_2, \qquad \dots , \qquad u_m = v$$

მიმდევრობა, რომელშიც მეზობელი სიტყვები მიიღება ერთი მეორესაგან $x_i^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon}$ სახის ქვესიტყვის ერთი ჩადგმით, ან ერთი ამოშლით. ფორმულა (5)-ის გამო $\rho(u_{i+1}) \equiv \rho(u_i)$ და ამიტომ $\rho(u) \equiv \rho(v)$. რადგან u და v სიტყვები უკვეცია, მივიღებთ, რომ $u \equiv v$.

ბ) $[u][v]$ ნამრავლის დამოუკიდებლობა u, v წარმომადგენელთა არჩევის მიმართ გამომდინარეობს ა)-დან და (6) ფორმულიდან. კლასების გამრავლების ასოციაციურობა უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრებიბიდან. ერთეულია ცარიელი სიტყვის შემცველი კლასი, ხოლო $[x_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, x_{i_m}^{\varepsilon_m}]$ კლასის შებრუნებული კლასია $[x_{i_m}^{-\varepsilon_m}, \dots, x_{i_1}^{-\varepsilon_1}]$. □

F(X) ჯგუფს ეწოდება თავისუფალი ჯგუფი X თავისუფალი წარმომქმნელთა სიმრავლით, ხოლო |X| სიმძლავრეს მისი (თავისუფლების) ხარისხი. თუ $X = \{x_1, x_2, \dots , x_n\}, X = \{x_1, x_2,$ $\dots\}$ მაშინ F(X)-ის ნაცვლად შესაბამისად წერენ აგრეთვე $F_n(X),\ F_\infty(X)$. თუკი წარმომქმნელთა აღნიშვნები არაარსებითია, მაშინ წერენ უბრალოდ F_n, F_∞ . შემდგომში თავისუფალი ჯგუფის ელემენტთა ჩაწერისათვის გამოვიყენებთ კლასთა წარმომადგენლებს, ე.ი. დავწერთ,

მაგალითად $u = v, uv = w$ ნაცვლად $[u] = [v], [u][v] = [w]$. პუნქტი ა)-ს გათვალისწინებით შეიძლება ვილაპარაკოთ კლასის უკვეც ჩაწერაზე, თუ ამის ქვეშ ვიგულისხმებთ ნებისმიერი მისი u წარმომადგენლის $\rho(u)$ ჩანაწერს.

შენიშვნა. შემდგომში მოხერხებულია კვეცადი სიტყვებიც (წარმომადგენლებიც) განვიხილოთ, როგორც F(X)-ის ელემენტები: რადგან F(X) ჯგუფია, ცალსახა აზრს იძენს ნებისმიერი $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ ნამრავლი, ამიტომ ის უნდა ჩავთვალოთ F(X)-ში კვეცადი $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ სიტყვის ტოლად. აქედან აგრეთვე ცხადია, რომ u სიტყვაში სრული შეკვეცის $\rho(u)$ ფუნქცია არაა დამოკიდებული შეკვეცის შესრულების მიმდევრობაზე (რიგზე)u სიტყვაში (რადგან F(X)-ში გამრავლების შედეგი ცალსახადაა განსაზღვრული F(X)-ში). თურმე ნებისმიერი ჯგუფი, რომელსაც გააჩნია n სიმძლავრის წარმომქმნელთა სიმრავლე, n ხარისხის თავისუფალი ჯგუფის ჰომომორფული ანასახია.

თეორემა 2.3. ვთქვათ G ჯგუფი წარმოიქმნება $M = \{g_i \mid i \in I\}$ სიმრავლით. ავიღოთ ალფავიტი $X = \{x_i \mid i \in I\}$. ასახვას X-დან M-ზე წესით $x_i \to g_i$ აქვს ერთადერთი გაგრძელება F-სა და G-ს ჰომომორფიზმამდე.

დამტკიცება. თავისუფალი F(X) ჯგუფის u ელემენტის ცალსახა $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m},\ x_{i_k} \in X,\ \varepsilon = \pm 1$ სახით იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ ასახვა $\varphi(u) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_m}^{\varepsilon_m}$. ამ ასახვის ჰომომორფულობა ცხადია, ხოლო $\varphi(x_i) = g_i$ განსაზღვრებით.

შენიშვნა 2.4. რადგან ჯგუფში ყოველთვის შეიძლება ავარჩიოთ რომელიღაც წარმომქმნელთა სისტემა, ამიტომ თეორემა 2.3.-ს ძალით არსებობს სურექციული ჰომომორფიზმი $\varphi: F(X) \to G$, $\varphi(x_i) = g_i$, $i \in I$. ასეთ $\varphi: F(X) \to G$ ჰომომორფიზმს ეწოდება G-ს წარმოდგენა. გასაგებია, რომ წარმოდგენა დამოკიდებულია G-ში წარმომადგენელთა არჩევაზე. ნებისმიერი $u \in F(X)$ სიტყვის $u(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_n})$ ანასახს G-ში φ ჰომომორფიზმის დროს ეწოდება $u = u(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ მნიშვნელობა. უფრო ზოგადად, $g \in G$ ელემენტს ეწოდება u სიტყვის მნისვნელობა, თუ g არის u სიტყვის ანასახი რომელიღაც $F(X) \to G$ ჰომომორფიზმის დროს. □

$\varphi: F(X) \to G$ ჰომომორფიზმის H ბირთვის ელემენტებს ეწოდებათ G ჯგუფის თანაფარდობები X ალფავიტში. თუ თანაფარდობათა H′ სიმრავლე (H'⊂H) ისეთია, რომ მისი ნორმალური ჩაკეტვა, ე.ი. მინიმალური ნორმალური ქვეჯგუფი F(X)-ში, რომელიც მოიცავს H′-ს , ემთხვევა H-ს, მაშინ H′-ს ეწოდება თანაფარდობათა განმსაზღვრელი სიმრავლე X ალფავიტში. რადგან $G \cong F(X)/H$, ამიტომ X ალფავიტის და H′ სიმრავლის მოცემა სავსებით განსაზღვრავენ G ჯგუფს.

წყვილს X, H′ ეწოდება ასევე G ჯგუფის წარმოდგენა; სიმბოლური ჩაწერა: G=gr(X| H′). ზოგჯერ სიმოკლისათვის წარმომომქმნელ ელემენტთანსიმრავლეს არ მიუთითებენ, რადგან იგულისხმება, რომ ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა იმ ელემენტით, რომლებიც მონაწილეობენ

განმსაზღვრელ თანაფარდობებში. რა თქმა უნდა ერთი და იგივე ჯგუფს გააჩნია ბევრი წარმოდგენა და ამა თუ იმ წარმოდგენის სარგებლიანობა დამოკიდებულია კონკრეტულ ამოცანაზე. განსაკუთრებით საინტერესოა ჯგუფები სასრული წარმოდგენებით; მათ ეწოდება სასრულად განსაზღვრული.

§ 3. იგივეობები და ჯგუფთა მრავალსახეობები

ვთქვათ $v(\bar{x}) = v(x_1, \ldots, x_n) \in F(X)$. მისი მნიშვნელობა ნებისმიერ G ჯგუფში ეწოდება ელემენტს $v(\bar{g}) = v(g_1, \ldots, g_n) \in G$.

განსაზღვრება 3.1. ამბობენ, რომ G ჯგუფზე სრულდება $v(\bar{x}) = 1$ იგივეობა, თუ $v(\bar{g}) = 1$ ნებისმიერი $\bar{g} \in G^n$.

შენიშვნა. არსებითია ვთქვათ, რომ წარმომქმნელთა შორის თანაფარდობების განსაზღვრებიდან განსხვავებით, რომელიც §2-ში იყო მოცემული, აქ ლაპარაკია ყველა მნისვნელობაზე, ე.ი. განიხილება ყველა $\varphi: F(X) \to G$ ჰომომორფიზმი (და არა რომელიღაც ფიქსირებული ჰომომორფიზმი).

განსაზღვრება 3.2. ამბობენ, რომ სიტყვა $v(\bar{x}) \in F(X)$ იგივეობაა L ჯგუფთა კლასზე, თუ L კლასის ნებისმიერ G ჯგუფზე $v(\bar{g}) = 1$.

შენიშვნა. ხშირად იგივეობას უწოდებენ თვით $v(\bar{x})$ სიტყვას მითითებული თვისებით. ყველა იგივეობის საცავია F(X) თავისუფალი ჯგუფი თვლადი $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ ბაზისით.

განსაზღვრება 3.3. ვთქვათ $V \subseteq F(X)$ სიტყვათა სიმრავლეა. ყველა იმ ჯგუფთა $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V)$ კლასს, რომელთათვისაც ნებისმიერი $v \in V$ სიტყვა იგივეობაა, ეწოდება იგივეობათა V სიმრავლის მიერ წარმოქმნილი მრავალსახეობა:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(V) = \{G | v(G) = 1 \ \forall v \in V\},$$

სადაც

$$v(G) = \{v(\bar{g}) | \bar{g} \in G^n\}.$$

მაგალითები.

1) 0- ყველა ჯგუფთა მრავალსახეობა, მოიცემა იგივეობათა ცარიელი სიმრავლით:

2) 1- ერთეულოვანი მრავალსახეობაა, რომელიც შედგება ერთეულოვანი E ჯგუფისაგან, მოიცემა იგივეობით x=1;

3) $\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}$-ყველა ჯგუფთა მრავალსახეობა პერიოდით n, მოიცემა $x^n = 1$ იგივეობით და ეწოდება ბერნსაიდის მრავალსახეობა პერიოდით (ექსპონენტით) n;

4) $\mathcal{A}$ ყველა აბელური ჯგუფთა მრავალსახეობა, მოიცემა იგივეობით $[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = 1$; $\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$ყველა აბელურ ჯგუფთა მრავალსახეობა, მოიცემა იგივეობით $[x_1, x_2] = 1$, $x_1^n = 1$, (სხვა მრავალსახეობა, რომელიც სედგება მხოლოდ აბელური ჯგუფებისაგან, არ არსებობს).

5) $\mathfrak{N}_k$ ყველა ნილპოტენტურ ჯგუფთა მრავალსახეობა ნილპოტენტურობის საფეხურით $\leq k$, მოიცემა იგივეობით $[x_1, \ldots, x_{k+1}] = 1$, სადაც $[x_1, \ldots, x_{k+1}] = [[x_1, \ldots, x_k], x_{k+1}]$

განსაზღვრება 3.4. ვთქვათ V სიტყვათა სიმრავლეა F(X)-დან, G ნებისმიერი ჯგუფია. ზოგად შემთხვევაში სიტყვები V-დან არ არის აუცილებელი იყვნენ იგივეობები G-ზე და მათი მნიშვნელობები G-ზე წარმოქმნიან ქვეჯგუფს.

$$V(G) = gr\big(v\big(g_1, \dots, g_{n(v)}\big)\,\big|\, v \in V, g \in G\big)$$

ამ ქვეჯგუფს ეწოდება V-ს მიმართ ვერბალური G-ში და რაღაც აზრით ზომავს G ჯგუფის გადახრას იმ ჯგუფთა მრავალსახეობებისაგან, რომელიც განისაზღვრება V-თი. ვერბალურ ქვეჯგუფთა მაგალითებია ჯგუფის კომუტანტი და ჯგუფის m-ური ხარისხი - ისინი განისაზღვრებიან $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ და x^m სიტყვებით და ზომავენ ჯგუფის გადახრას აბელური ჯგუფებისაგან და m პერიოდის მქონე ჯგუფებისაგან.

ცხადია, რომ V(G)=1 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G ჯგუფი აკმაყოფილებს ყველა v $=1, v \epsilon V$, იგივეობას , ე.ი. როცა G$\epsilon\mathfrak{N}(V)$. ისევე როგორც კომუტანტის შემთხვევაში მოწმდება, რომ V(G) ნორმალური ქვეჯგუფია G-ში და რომ H ნორმალური ქვეჯგუფი მოიცავს V(G)-ს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $G/H \in \mathfrak{N}(V)$. კერძოდ, V(G) დამოკიდებულია მხოლოდ $\mathfrak{N}(V)$-ზე (და,ცხადია,G-ზე)და არაა დამოკიდებული $\mathfrak{N}(V)$ მრავალსახეობის მოცემულ იგივეობათა სიმრავლეზე.

წინადადება 3.5. ვერბალურ ქვეჯგუფ F(X)-ში ზუსტად ის H ქვესიმრავლეებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

1. $u, v \in H \ \rightarrow uv \in H$
2. $u \in H \ \rightarrow u^{-1} \in H$
3. $u \in H,\ v_1, \dots, v_{n(u)} \ \in F_\infty(X) \rightarrow u(v_1, \dots, v_{n(u)}) \in H$

დამტკიცება: თუ $u \epsilon H \subseteq F_\infty$,მაშინ $u(x_1, \dots, x_{n(u)})$.

ყოველ $v_i = v_i(x_1, \dots, x_{n(v_i)})$ და, მაშასადამე,$u = \ u\big(v_1, \dots, v_{n(u)}\big) = u(x_1, x_2, \dots)$. რ.დ.გ.

მარავალსახეობებსა და F_∞ -ში მათ განმსაზღვრელ სიტყვათა სიმრავლეებს სორის შესაბამისობა არაა ურთიერთცალსახა, რადგან სიტყვათა ორ განსხვავებულ სიმრავლეს შეუძლია განსაზღვროს ერთი და იგივე მრავალსახეობა. მეორე მხრივ, ყველა იმ იგივეობათ სიმრავლე, რომლებიც სამართლიანია მოცემულ მრავალსახეობაზე, ვერბალური ქვეჯგუფია F_∞-ში და ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს შესაბამისობა მრავალსახეობებსა და ვერბალურ ქვეჯგუფთა შორის ურთიერთცალსახაა. ამგვარად, მრავალსახეობათა შესწავლა და F_∞-ში ვერბალურ ქვეჯგუფთა შესწავლა ტოლფასი ამოცანებია.

განსაზღვრება 3.6. იგივეობათა ორ V და W სიმრავლეს ეწოდება ექვივალენტური, თუ ისინი განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე მრავალსახეობას ან, რაც იმის ტოლფასია, რომ $V(F_\infty) = W(F_\infty)$.

თეორემა 3.8. იგივეობათა ნებისმიერი V სიმრავლე $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ბაზისში $W = \{x_1^m, m \in \mathbb{N};\ u_j \mid j \in J\}$ სახის სიმრავლის ექვივალენტურია, სადაც u_j თავისუფალი F(X) ჯგუფის კომუტანტის ელემენტებია.

დამტკიცება. ჯერ გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა. ვთქვათ F ის თავისუფალი წარმომქმნელთა სიმრევლეა $\{x_i \mid i \in I\}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ F-ის ფაქტორ-ჯგუფი F/F'- კომუტანტის მიმართ თავისუფალი ებელური ჯგუფია x_iF' თავისუფალი წარმომქმნელებით გვექნება, რომ ნებისმიერი $h \epsilon F$ ელემენტი შეიძლება ჩავწეროთ $h = x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \dots x_{i_s}^{m_s} f'$

სახით, სადაც $f' \in F', 0 \leq s \epsilon \mathbb{Z}$, ყველა $i_1, i_2, \dots, i_s$ ინდექსი განსხვავებულია, ხოლო ყველა მაჩვენებელი m_k განსხვავებულია ნულისაგან. ამასთან, თუ $h \notin F'$,მაშინ$s > 0$.

შევუდგეთ თეორემის დამტკიცებას. ყოველი v სიტყვა V-დან ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$v = x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \dots x_{i_s}^{m_s} u,$$

სადაც ყველა $i_1, i_2, \dots, i_s$ ნიშნაკი განსხვავებულია, ხოლო u თავისუფალი $F(x_1, x_2, \dots)$. ჯგუფის F' კომუტანტის ელემენტია. ვთქვათ $m_1, m_2, \dots m_s$. რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფია d ყვალა v-ს მიხედვით V-დან. რიცხვი d და u ელემენტები საძიებელია. მართლაც, ცხადია,რომ $V(F_\infty) \leq W(F_\infty)$. პირიქით, სიტყვები $x_{i_k}^{m_k}$ ეკუთვნიან $V(F_\infty)$-ს,რადგან ისინი მიიღება v-დან როცა ალფავიტის დანარჩენი სიმბოლოები იგზავნება ერთეულში. ამის გამო x_1^d, u სიტყვებიც $V(F_\infty)$-ს ეკუთვნიან. ამრიგად, $V(F_\infty) \leq W(F_\infty)$.■

§ 4. თავისუფალი ჯგუფები მრავალსახეობებში

ამ პარაგრაფის მიზანია დავამტკიცოთ არსებობა და ავღწეროთ თავისუფალი ჯგუფები ნებისმიერ მრავალსახეობაში.

თეორემა 4.1. ვთქვათ $\mathfrak{M}$ ჯგუფთა მრავალსახეობაა, რომელიც განსაზღვრულია V იგივეობებით. ვთქვათ X ბაზისია,

$$F_V(X) = F(X)/V(F(X)),$$

ε აღნიშნავს ბუნებრივ $F(X) \to F_V(X)$ ჰომომორფიზმს. თუ $X = \{x_i \mid i \in I\}$, G ჯგუფია $\mathfrak{M}$-დან $\{g_i \mid i \in I\}$ სიმრავლით წარმოქმნილი, მაშინ ასახვა $x_i^{\varepsilon} = x_i V(F) \to g_i$ ერთადერთი გზით გრძელდება $F_V \to G$ ჰომომორფიზმამდე. სხვა სიტყვებით $F_V(X)$ ჯგუფები თავისუფალია $\mathfrak{M}$ მრავალსახეობებში. მათ მიერ ამოიწურება თავისუფალი ჯგუფები$\mathfrak{M}$-ში.

დამტკიცება.ჯერ გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა.ვთქვათ v ნებისმიერი სიტყვაა. ცხადია, რომ ყოველი $\varphi: G \to G^*$ ჰომომორფიზმისათვის $v(g_1, g_2, \ldots g_n)^{\varphi} = v(g_1^{\varphi}, \ldots, g_n^{\varphi})$. ამის გამო ვერბალური V(G) ქვეჯგუფის ანასახი V(G^*) ვერბალურ ქვეჯგუფშია. კერძოდ, ყოველი ვერბალური ქვეჯგუფი ენდომორფულად დასაშვებია.

ა)განვიხილოთ აბსოლიტურად თავისუფალი F(X) ჯგუფი და G=gr($g_i | i \epsilon I$) ჯგუფი $\mathfrak{M}$ მრავალსახეობიდან V იგივეობებით. ასახვა $x_i \to g_i$ გრძელდება $\varphi: F(X) \to G$ ჰომომორფიზმამდე. ნებისმიერი v - თვის, $v \epsilon V, v(g_1, g_2, \ldots g_n)^{\varphi} = 1$ და ამიტომ $V(F) \to 1$ ე.ი. $V(F) \subseteq Ker\varphi$. ახლა გასაგებია,რომ $\delta: F_V(G) \to G$ ჰომომორფიზმის მისაღებათ საჭიროა v სიტყვას $\overline{x}_i$ -ების მიმართ შევუსაბამოდ იგივე სიტყვა $\overline{g}_i$ -ების მიმართ $v(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n(v)} \to v(g_1, \ldots, g_{n(v)})$.ასეთი δ ასახვის კორექტულობა და ჰომომორფულობა უშვალოდ მოწმდება. ამჰვარად, $F_V(X)$ თავისუფალი ჯგუფია $\mathfrak{M}$ -ში.

ბ)ვთქვათ F თავისუფალი ჯგუფია $\mathfrak{M}$ -ში თავისუფალი წარმომქმნელებით $f_i, i \epsilon I$. ასახვა $f_i \to \overline{x}_i$ გრძელდება $F \to F_V(X)$ ჰომომორფიზმამდე, ხოლო $\overline{x}_i \to f_i$ გრძელდება $F_V(X) \to F$ ჰომომორფიზმამდე. ამგვარად $F \cong F_V(X)$. ■

წარმომქმნელთა $\{\overline{x}_i = x_i V(F) | i \in I\}$ - სიმრავლეს ეწოდება $F_V(X)$ თავისუფალი ჯგუფის ბაზისი (ან თავისუფალ წარმომქმნელთა სიმრავლე) $\mathfrak{M}$ მრავალსახეობაში. $\mathfrak{M}$ -თავისუფალი ჯგუფის კერძო შემთხვევაა თავისუფალი აბელური F/[F,F] ჯგუფის ცნება - ის თავისუფალია ყველა აბელური ჯგუფთა მრავალსახეობაში. საზოგადოდ, იშვიათ შემთხვევებში $\mathfrak{M}$ თავისუფალ ჯგუფებს გააჩნია კარგი კონსტრუქციული აღწერა. ასეთ გამონაკლისებს მიეკუთნება თავისუფალი აბელური ჯგუფები.

თეორემა 4.2. თავისუფალი აბელური ჯგუფი A ბაზისით $\{a_i | i \in I\}$ იშლება უსასრულო ციკლურ $< a_i >$ $(i \in I)$ ჯგუფთა პირდაპირ ნამრავლად.

დამტკიცება.განვიხილოთ დამხმარე ნამრავლი $G = \prod_{i\in I} G_{i,}$ სადაც $G_{i,} =< x_i >$ უსასრულო ციკლური ქვეჯგუფებია.**თეორემა 4.1.**-ის ძალით ასახვა $a_i \to x_i$ გრძალდება აბელური A ჯგუფის აბელურ G ჯგუფზე $\varphi: A \to G$ ჰომომორფიზმამდე. მეორე მხრივ, G-ში $x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n}$ ელემენტის ჩაწერის ერთადერთობა იძლევა საშუალებაშ კონკრეტულად განვსაზღვროთ ასახვა $\sigma: G \to A$ ჭესით $(x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n})^{\sigma} = a_{i_1}^{k_1} \dots a_{i_n}^{k_n}$ რომელიც, როგორც ადვილი დასანახია ჰომომორფიზმია A-ს აბელურობის გამო.რადგან φ და σ ურთიერთ შებრუნებულია, ისინი იზომორფიზმებია და $\prod_{i\in I} < a_i >$. ■

თავისუფალ აბელურ ჯგუფს A-ს ბაზისით $\{a_1, \dots, a_n\}$ აქვს წარმოდგენა

$$A=\{a_1, \dots, a_n | a_i^{-1} a_j^{-1} a_i a_j = 1; 1 \le i < j \le n\}, \qquad (*)$$

რადგან ჯგუფი G რომელიც $(*)$ წარმოდგენითაა მოცემული, აბელურია და ურთიერთ შებრუნებული ჰომომორფიზმები A-ს და G-ს შორის არსებობენ **თეორემა 4.1.** და **4.2.** შესაბამისად. კერძოდ, $\langle a, b | [a, b] = 1\rangle$ თავისუფალი აბელური ჯგუფია ორი წარმომქმნელით.

თეორემა 4.3. ვთქვათ $\mathfrak{M}$ ჯგუფთანმრავალსახეობაა, ხოლო G თავისუფალი ჯგუფია $\mathfrak{M}$ -ში. ნებისმიერი ენდომორფულად დასაშვები H ქვეჯგუფი G-ში ვერბალურია.

დამტკიცება: ავიღოთ G-ში თავისუფალ წარმომქმნელთა $\{g_i | i\epsilon I\}$ სიმრავლე და F_∞ -ში განვიხილოთ $v(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ სიტყვათა V სიმრავლე იმ პირობით, რომ $v(g_{i_1}, \dots, g_{i_n}) \in H$. ვაჩვენოთ, რომ H=V(G). ცხადია, რომ H≤ $V(G)$.

პირიქით, ვთქვათ v∈ $V, g_i{}' \in G$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$v(g'_{i_1}, \dots, g'_{i_n}) \in H.$$

იმის გამო, რომ G თავისუფალია $\mathfrak{M}$ -ში ასახვა$g_i \to g'_i$შეიძლება გაგრძელდეს G ჯგუფის ენდომორფიზმამდე. რადგან $v(g_{i_1}, \dots, g_{i_n}) \in H$ და H ენდომორფულად დასაშვებია, ამიტომ $v(g'_{i_1}, \dots, g'_{i_n}) \in H$. ■

---

§ 5. სხვაგვარი მიდგომა მრავალსახეობებისადმი

ვთქვათ L ჯგუფთა კლასია:

ა) S(L)-ით ავღნიშნოთ L კლასის ჩაკეტვა ქვეჯგუფთა აღების მიმართ, ე.ი. L-ს მის ყველა G ჯგუფთან ერთად ეკუთვნის ნებისმიერი ქვეჯგუფი;

ბ) Q(L)-ით ავღნიშნოთ L კლასის ჩაკეტვა ჰომომორფულ ანასახთა მიმართ, ე.ი. L-ს მისი ყველა G ჯგუფთან ერთად ეკუთვნის ნებისმიერი ფაქტორ-ჯგუფი;

გ) C(L)ით ავღნიშნოთ L კლასის ჩაკეტვა დეკარტული ნამრავლების ოპერაციის აღების მიმართ, ე.ი. ჯგუფთა ნებისმიერი $\{G_\alpha$ ქვესიმრავლესათვის L-დან, L-ს ეკუთვნის მათი დეკარტული $\prod G_\alpha$ ნამრავლი.

თუ L მრავალსახეობაა, მაშინ, ცხადია, რომ S(L)=L, Q(L)=L, C(L)=L თურმე სამართლიანია შებრუნებული .

თეორემა 5.1. (ბირკგოფი). ვთქვათ L ჯგუფთა კლასია. თუ S(L)=L, Q(L)=L, C(L)=L მაშინ L მრავალსახეობაა.

დამტკიცება: ვთქვათ V ყველა ის იგივეობაა, რომლებიც სამართლიანია L-ზე, ხოლო $\overline{L}$ მრავალსახეობაა, რომელიც განისაზღვრება V-თი: $\overline{L} = \overline{L}(V)$. ცხადია, რომ L$\subseteq \overline{L}$ და საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ $\overline{L} \subseteq$ L. რადგან Q(L)=L, ამიტომ საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ნებისმიერი F_V ჯგუფი, რომელიც თავისუფალია $\overline{L}$-ში ეკუთვნის L -ს. უფრო ზუსტად, თუ $X = \{x_i | \, i \epsilon I\}$ ალფავიტია, G=$\langle g_i | i \epsilon I \rangle, F_V(X)$ თავისუფალი ჯგუფია ($x_i \to g_i \Rightarrow F(X) \to G$ ჰომომორფიზმია), მაშინ ნებისმიერი ჯგუფი L-დან შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თავისუფალი ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი, ხოლო თეორემის Q(L)=L პირობიდან, ე.ი. L-ის ყველა ჯგუფთან ერთად L-ს ეკუთვნის ნებისმიერი მისი ფაქტორ-ჯგუფი.შემდეგ, S(L)=L და C(L)=L თანაფარდობათა გამო საკმარისია (გვინდა ვაჩვენოთ, რომ $F_V \epsilon \overline{L} \Rightarrow F_V \epsilon$L) F_V ჩავდგათ იზომორფულად L-დან ჯგუფთა დეკარტულ ნამრავლში. **თეორემა 4.1.**-ის ძალით

$$F_V(X) = F(X)/V(F(X)),$$

სათანადო $X = \{x_i | \, i \epsilon I\}$ ალფავიტში . ყოველი $v(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ სიტყვისათვის, რომელიც არ ეკუთვნის V სიმრავლეს, ავიღოთ G_V ჯგუფი L-ში, ხოლო მასში g_{V_i} , $i \epsilon I$ ელემენტები, რომლებზედაც

$$v(g_{vi_1}, \dots, g_{vi_m}) \neq 1$$

ავიღოთ დეკარტული ნამრავლი

$$\prod_{v \neq V(F)} G_v$$

ხოლო მასში F^* ქვეჯგუფი, წარმოქმნილი $f_i, i \epsilon I$ ელემენტებით სადაც $f_i(v) = g_{vi}$:

$$f_i = (\dots, g_{vi}, \dots),\ F^* = \langle f_i |\ i \epsilon I \rangle.$$

რადგან f_i ელემენტები არ აკმაყოფილებენ არც ერთ თანაფარდობას, გარდა იგივეობების V(F)-დან, ამიტომ მათ მიერ წარმოქმნილი ქვეჯგუფი თავისუფალია. ამგვარად,

$\varphi: F_V(X) \to F^*,\ x_i \to f_i$ იზომორფიზმია. ■

ადვილი დასანახია, რომ სინამდვილეში ჩვენ დავამტკიცეთ ტოლობა $\overline{L} = QSC(L)$ ნებისმიერი L ჯგუფთა კლასისათვის. სხვა სიტყვებით, თუ L ჯგუფთა ნებისმიერი კლასია, მაშინ $\overline{L} = QSC(L)$ მრავალსახეობაა.

ამოცანა 5.1ვთქვათ G სასრული ჯგუფია, ხოლო $\mathfrak{M}$ მრავალსახეობაა, განსაზღვრულია ყველა ინ იგივეობებით, რომლებიც ჭეშმარიტია G-ზე. მაშინ ყოველი სასრულად წარმოქმნილი ჯგუფი $\mathfrak{M}$-დან სასრულია.

ამოხსნა.გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\overline{L} = QSC(L) \text{ როცა } L=\{G\},$$

ე.ი L= $QSC(L)$. განვიხილოთ $G_a, a \in I$, ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლი, სადაც ყოველი $G_a = G{:}\overline{\prod_{a\in I} G_a}$. იმისათვის, რომ მივიღოთ ნებისმიერი ჯგუფი -- მრავალსახეობიდან, უნდა ავიღოთ ქვეჯგუფი $\prod_{a\in I} G_a$ დეკარტული ნამრავლიდან, ხოლო შემდეგ მისი ფაქტორ-ჯგუფი. ჩვენს შემთხვევაში საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ თუ $H \le \overline{\prod_{a\in I} G_a}$ და H სასსრულად წარმოქმნილია, მაშინ H სასრულია. ამ შემთხვევაში ფაქტორ-ჯგუფიც იქნება სასრული.

ვთქვათ

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$
$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$$
$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$$

ნამრავლისათვის

$$(a_1 b_1 a, a_2 b_2 c_2, \dots, a_n b_n c_n, \dots)$$

G ჯგუფის სასრულობის გამო არსებობს ისეთი ნატურალური n, რომლის შემდეგ ყველაფერი მეორდება. აქედან კი ჩანს, რომ თუ $H \le \overline{\prod_{a\in I} G_a}$ და H სასრულად წარმოქმნილია, მაშინ ის სასრულია.

ამოცანა 5.2. სასრულად წარმომნილ G ჯგუფს ნებისმიერი სასრული ინდექსის მქონე H ქვეჯგუფი შეიცავს სასრულ ვერბალურ ქვეჯგუფს.

ამოხსნა. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ თუ A სასრული ინდექსის მქონე ქვეჯგუფია G-ში, მაშინ თნაკვეთა

$$N = \bigcap_{x\in G} A^x$$

სასრული ინდექსი ნორმალური ქვეჯგუფია G-ში. მართლაც, ვთქვათ $A \le G, |G{:}A| < \infty$. უნდა ვაჩვენოთ , რომ $N \trianglelefteq G$ და $|G{:}N| < \infty$.. ავიღოთ ნებისმიერი $g \epsilon G$ და განვიხილოთ

$$N^g = \left(\bigcap_{xg\in G} A^x\right)^g = \bigcap_{xg\in G} A^{xg} = \bigcap_{x\in G} A^x = N,$$

ე.ი $N^g = N$ და ამიტომ $N \trianglelefteq G$.

რადგან $|G:A| < \infty$, გვექნება

$$G = A \bigcup A_{g_2} \bigcup \dots \bigcup A_{g_n}.$$

მეორე მხრივ $\{A^x\}$-ის სიმრავლე $|G:N_G(A)|$ ინდექსის ტოლია.

$$\left(A \cup A_{g_2} \cup \dots \cup A_{g_n}\right)^x = A^x \cup (Ag_2)^x \cup \dots \cup A_n^x\, g_n^x = G^x = G \quad \forall x\epsilon G$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $\left(A_{g_i}\right)^x = A^x g_i^x$.

ამგვარად, A^x-ს როცა $x \in G$ აქვს აგრეთვე სასრული ინდექსი, ე.ი. $|G:A^x| < \infty$

რადგან$A < N_G(A) < G$, ამიტომ

$$|G:A| = |G:N(A)| \cdot |N(A):A|$$

რაოდენობა $\{\, A^x | x \in G\}$ სასრულია და ინდექსი $|G:N(A)| -$ს ინდექსის ტოლია, ხოლო სასრული რაოდენობის სასრული ინდექსის მქონე ქვეჯგუფთა თანაკვეტას გააჩნია სასრული ინდექსი. ამგვარად, $N = \bigcap_{x\in G} A^x \trianglelefteq G$ და $|G:N| < \infty$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის თანახმად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ H ნორმალურია G-ში. ვთქვათ V ყველა იმ იგივეობათა სიმრავლეა, რომლებიც ჭეშმარიტია სასრულ G/H ფაქტორ-ჯგუფზე, ხოლო $\mathfrak{M}$ = $\mathfrak{M}$ (V), V-ს მიერ წარმოქმნილი მრავალსახეობაა.

რადგან G/V(G) ფაქტორ-ჯგუფი სასრულად წარმოქმნილია და $\mathfrak{M}$ -ს ეკუთვნის, მაშინ **ამოცანა 5.1**-ს საფუძველზე სასრულია. ამის გამო ვერბალურ V(G) ქვეჯგუფს გააჩნია სასრული ინდექსი.

ამოცანა 5.3 მივუთითოთ L, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ჯგუფთა კლასები პირობებით:

1) $S(L) \neq L$, $Q(L) = L$, $C(L) = L$;

2) $S(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, $Q(\mathfrak{M}) \neq \mathfrak{M}, C(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$;

3) $S(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, $Q(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, $C(\mathfrak{N}) \neq \mathfrak{N}$;

ამოხსნა: 1) ვთქვათ L სრულ ჯგუფთა კლასია.

განსაზღვრება.G ჯგუფს ეწოდება სრული, თუ ნებისმიერი მთელი n>0 რიცხვებისათვის და ნებისმიერი g $\epsilon\, G$ ელემენტისათვის $nx = g$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი G-ში (მულტიპლიკაციური ჩანაწერში x^n=g განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი G-ში).

ცხადია, რომ რაციონალურ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი $\mathbb{Q}$ სრულია. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$ ქვეჯგუფი არაა სრული. ამგვარად $S(L) \neq L$, ხოლო $Q(L) = L$ და $C(L) = L$.

2)ვთქვათ $\mathfrak{M}$ ჯგუფთა კლასია გრეხვის გარეშე, ე.ი. ყოველი არაერთეულოვანი ელემენტი უსასრულო რიგისაა. ადვილი დასანახია, რომ $S(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ და $C(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ მაგრამ $Q(\mathfrak{M}) \neq \mathfrak{M}$.

თუ ავიღებთ $(\mathbb{Z}, +)$ ჯგუფს მას, როგორც ვიცით, გრეხვა არ გააჩნია, მაგრამ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ფაქტორ-ჯგუფს გრეხვა გააჩნია.

3) ვთქვათ $\mathfrak{N}$ სასრულ ჯგუფთა კლასია, ცხადია, რომ $S(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, ე.ი. სასრული ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფი სასრულია, ე.ი. $Q(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. მაგრამ სასრულ ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლი უსასრულო ჯგუფია, ე.ი. $C(\mathfrak{N}) \neq \mathfrak{N}$.

ლიტერატურა

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М. Факториалб 2002
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в тех частях) М. Физматлит 2001.
3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю.И. основы теории групп. 5-е изд. СПБ.: Издателъства «Ланъ» 2009
4. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962
5. Шафаревич И.Р. Основые панятя алгебры. Москва, Ижевск, 2001
6. Олъшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989
7. Нейман Х. Многообразия групп. – М.: Мир, 1969
8. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974
9. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980.