ივანე ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მიმართულება გამოყენებითი მათემატიკა

მაღალი რიგის თითქმის წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებები A და B თვისებებით

მაგისტრი

მაია ბობოხიძე

სამაგისტრო ნაშრომი

ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა

ფაკულტეტის პროფესორი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი 2015

სარჩევი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ნაშრომში შესწავლილია შემდეგი სახის ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლების

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0$$

ასიმპტოტური ყოფაქცევა, სადაც $n \geq 2$ და $F: C(R_+; R) \rightarrow L_{loc}(R_+; R)$ არის უწყვეტი ასახვა. კერძოდ დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება (იხ. განმარტება ქვემოთ). იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. მიღებული შედეგები წარმოადგენს კონდრატიევის, ჭანტურიას და კოპლატაძის ზოგიერთი შედეგის განზოგადოებას.

Abstract

We study asymptotic behavior of solutions of a functional differential equation

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0$$

where ≥ 2 , $F: C(R_+; R) \rightarrow L_{loc}(R_+; R)$ is a continuous mapping. Sufficient conditions for the equation to have the so-called Property A and B are established. In the case of ordinary differential equation the oblained results lead to an generalization of the well-known theorems by Kondrat'ev, Chanturia and Koplatade.

1. შესავალი

ვთქვათ $\tau \in C(R_+; R_+)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = +\infty$. $V(\tau)$-თი აღვნიშნოთ სიმრავლე ყველა უწყვეტი ასახვებისა $F: C(R_+; R) \to L_{loc}(R_+; R)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $F(x)(t) = F(y)(t)$, ნებისმიერი $t \in R_+$-თვის და $x, y \in C(R_+; R)$, როცა $x(s) = y(s)$, $s \geq \tau(t)$.

მოცემული ნაშრომი ეძღვნება შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლების

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0 \tag{1.1}$$

ამონახსნების ოსცილაციური თისებების შესწავლას, სადაც $n \geq 2$ და $F \in V(\tau)$.

ნებისმიერი $t_0 \in R_+$, $H_{t_0,\tau}$-თი აღვნიშნოთ სიმრავლე იმ $u \in C(R_+; R_+)$ ფუნქციებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$u(t) \neq 0 \ \text{ როცა } \ t \geq t_* , \ \text{ სადაც } \ t_* = \min\{t_0, \tau_*(t_0)\} , \ \ \tau_*(t) = \inf\{\tau(s); s \geq t\}.$$

მოცემულ შრომაში ყველგან $V(\tau)$ და $H_{t_0,\tau}$ გამოიყენება მხოლოდ ზემოთ მოცემულ აღნიშვნებში, სადაც τ აკმაყოფილებს ზემოთ მოცემულ პირობებს.

ყველგან იგულისხმება, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან

$$F(u)(t)\, u(t) \geq 0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0, \quad U \in H_{t_0,\tau} , \tag{1.2}$$

ან

$$F(u)(t)\, u(t) \leq 0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0, \quad U \in H_{t_0,\tau} . \tag{1.3}$$

ვთქვათ $t_0 \in R_+$. ფუნქციას $u: [t_0, +\infty) \to R$ ვუწოდებთ (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს, თუ იგი აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0, +\infty)$ -ის ყოველ სასრულ შუალედში თავის

წარმოებულებთან ერთად $n-1$ რიგის ჩათვლით. $\sup\{|u(s)|: s \geq t\} > 0$, როცა $t \geq t_0$ და არსებობს ფუნქცია $\bar{u} \in C(R_+; R)$ ისეთი, რომ $\bar{u}(t) \equiv u(t)$ როცა $t \geq t_0$ და ტოლობა $\bar{u}^n(t) + F(\bar{u})(t) = 0$ სრულდება თითქმის ყველგან $[t_0, +\infty)$-ზე.

განმარტება 1.1. (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს $u: [t_0, +\infty) \to R$ ვუწოდებთ რხევადს, თუ არსებობს u ფუნქციის ნულების მიმდევრობა კრებადი $+\infty$ -სკენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამონახსნს ეწოდება არარხევადი.

განმარტება 1.2. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს პირობას

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0\,, \quad \text{როცა} \quad t \uparrow +\infty \quad (i = 0, \dots, n-1). \tag{1.4}$$

განმარტება 1.3. ვიტყვით, რომ 1.1 განტოლებას გააჩნია B თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n ის შემთხვევაში რხევადია, ხოლო კენთი ნ ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს (1.4) პირობას ან

$$\left|u^{(i)}(t)\right| \uparrow +\infty\,, \quad \text{როცა} \quad t \uparrow +\infty \quad (i = 0, \dots, n-1), \tag{1.5}$$

ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია ნ აკმაყოფილებს (1.5) პირობას.

ოსცილაციური თვისების შესწავლას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში დიდი ხნის ისტორია აქვს. ჯერ კიდევ კნეზერის მიერ [1] დაისვა შემდეგი ამოცანა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს p ფუნქცია, რომ

$$u^{(n)}(t) + P(t)\, u(t) = 0 \tag{1.6}$$

განტოლებას გააჩნდეს იგივე ტიპის ამონახსნები, როგორიც გააჩნია $u^{(n)} + u = 0$ და $u^{(n)} - u = 0$ განტოლებებს. მოგვიანებით ეს თვისებები ჩამოყალიბდა A და B თვისების სახით [1.2]. გამოიყენა რა კნეზერმა შტურმის თეორემა, მან დაამტკიცა, რომ თუ

$$\liminf_{t \to +\infty} \; t^2\, p(t) > \tfrac{1}{4}\ , \tag{1.7}$$

მაშინ

$$u''(t) + P(t)\, u(t) = 0 \tag{1.8}$$

განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია (ე.ი. გააჩნია A თვისება).

აღსანიშნავია, რომ (1.7) უტოლობა არ შეიძლება შეიცვალოს არამკაცრი უტოლობით. ეს შედეგი (1.8) განტოლების შემთხვევაში განზოგადებული იქნა მრავალი ავტორის მიერ (იხ. მ. რაბის მიმოხილვითი შრომა [3]).

რადგან მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში შტურმის თეორემის ანალოგი არ არის სამართლიანი, ამიტომ მაღალი რიგის განტოლების ამონახსნების

ოსცილაციური თვისებების შესწავლა გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. კნეზერმა აჩვენა, რომ თუ

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} p(t) > 0,$$

მაშინ (1.6) განტოლებას გააჩნია A თვისება [1]. კნეზერის ამ შედეგის შემდეგ არსებითი შედეგი მიღებულ იყო კონდრატიევის მიერ. კერძოდ, მის მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი თეორემა: თუ სრულდება უტოლობა $p(t) \geq q(t) \geq 0$ როცა $t \in R_+$ და

$$u^{(n)}(t) + q(t)u(t) = 0 \qquad (1.9)$$

განტოლებას გააჩნია A თვისება, მაშინ (1.6) განტოლებასაც გააჩნია A თვისება .

მოგვიანებით ჭანტურიას მიერ [4] დამტკიცებული იყო შემდეგი თეორემა:

ვთქვათ სრულდება უტოლობა $p(t) \leq q(t) \leq 0$ როცა $t \in R_+$ და (1.9) განტოლებას გააჩნია B თვისება, მაშინ (1.6) განტოლებასაც გააჩნია B თვისება. შედარების ამ თეორემებზე დაყრდნობით მათ მიერ მიღებულ იქნა შემდეგი სახის ეფექტური პირობები: ვთქვათ $p(t) \geq 0$ $(p(t) \leq 0)$ და

$$\liminf_{t\to+\infty} t^n |p(t)| > M_n \qquad (M_n^*), \qquad (1.10)$$

მაშინ (1.6) განტოლებას გააჩნია A (B) თვისება, სადაც

$$M_n = \max\{-\lambda(\lambda-1), \dots, (\lambda-n+1) : \lambda \in [0, n-1]\},$$

$$M_n^* = \max\{\lambda(\lambda-1), \dots, (\lambda-n+1) : \lambda \in [0, n-1]\}.$$

აღსანიშნავია, რომ (1.10) პირობა არ შეიძლება შეიცვალოს არამკაცრი უტოლობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში არსებობს ისეთი p ფუნქცია, რომ სრულდება უტოლობა

$$\liminf_{t\to+\infty} t^n |p(t)| \geq M_n \quad (M_n^*).$$

მაგრამ, (1.6) განტოლებას არ გააჩნია A (B) თვისება.

მოგვიანებით ჭანტურიას მიერ დამტკიცებული იქნა ინტეგრალური შედარების თეორემა, რამაც მას მისცა საშუალება მიეღო შემდეგი სახის ეფექტური პირობები იმისა, რომ (1.6) განტოლებას გააჩნდეს A (B) თვისება [4]. ვთქვათ $p(t) \geq 0$ $(p(t) \leq 0)$ და სრულდება პირობები

$$\liminf_{t\to+\infty} t \int_t^{+\infty} s^{n-2} p(s)ds > M_n ,$$

$$\liminf_{t\to+\infty} t^2 \int_t^{+\infty} s^{n-2} p(s)ds > \frac{M_n^*}{2} , \qquad (1.11)$$

მაშინ (1.6) განტოლებას გააჩნია A(B) თვისება.

კოპლატაძის მიერ [5] დამტკიცებული იქნა ორი ტიპის ინტეგრალური შედარების თეორემები დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომელიც (1.6) განტოლების შემთხვევაში საშუალებას იძლევა (1.11) პირობის დაზუსტებას.

კერძოდ, თუ $p(t) \leq 0$ და სრულდება უტოლობა

$$\liminf_{t \to \infty} t \int_t^{+\infty} s^{n-2} p(s) ds > M_n^*,$$

მაშინ (1.6) განტოლებას გააჩნია B თვისება [5].

მოცემულ სადიპლომო შრომაში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება.

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

მოცემულ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ მონოტონური და არამონოტონური ფუნქციების ზოგიერთ თვისებებს. ქვემოთ, ყველგან $\tilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0;\ +\infty])$-ით აღვნიშნავთ იმ $u: [t_0;\ +\infty) \to R$ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც აბსოლუტურად უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად $n-1$ რიგის ჩათვლით ყოველ $[t_0;\ +\infty)$ ინტერვალის სასრულ სეგმენტზე.

ლემა 2.1. ვთქვათ $u \in \tilde{C}_{\mathrm{loc}}^{n-1}([t_0;\ +\infty])$, $u(t) > 0, u^n(t) \leq 0$ $(u^n(t) \geq 0)$, როცა $t \geq t_0$, და $u^{(n)}(t) \neq 0$, $+\infty$-ის ნებისმიერ მიდამოში. მაშინ არსებობს ისეთი $t_* \geq t_0$ და $l \in \{0, \dots, n\}$, რომ $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია) და

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_* \quad (i = 0, \dots, l-1),$$

$$(-1)^{i+l} u^{(i)}(t) > 0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_* \quad (i = l, \dots, n-1), \tag{2.1$_l$}$$

$$u^{(n)}(t) \leq 0 \quad (u^{(n)}(t) \geq 0) \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*.$$

შენიშვნა 2.1. თუ $l = 0$, (2.1_l) პირობებში იგულისხმება, რომ სრულდება მეორე და მესამე პირობები.

დამტკიცება. ვთქვათ სრულდება პირობები $u(t) > 0$ და $u^n(t) \leq 0$ (ანალოგიურად მტკიცდება შემთხვევა, როცა $u^n(t) \geq 0$), როცა $t \geq t_0$. რადგან $u^n(t) \leq 0$ და $u^{(n)}(t) \neq 0$ როცა $t \geq t_0$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $t_1 \geq t_0$, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:

$$u^{(n-1)}(t)>0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \tag{2.2}$$

ან

$$u^{(n-1)}(t)<0 \quad \text{როცა} \quad t \geq t_1 \ . \tag{2.3}$$

ვთქვათ სრულდება (2.2) პირობა, მაშინ (2.2)-ის თანახმად მოიძებნება ისეთი $t_2 \geq t_1$, რომ $u^{(n-2)}(t)>0$ ან $u^{(n-2)}(t)<0$ როცა $t \geq t_2$.

ვთქვათ სრულდება პირველი პირობა, მაშინ (2.2)-ის თანახმად გვაქვს

$$u^{(n-3)}(t)=u^{(n-3)}(t_2)+\int\limits_{t_2}^{t} u^{n-2}(s)ds \geq u^{(n-3)}(t_0)+u^{(n-2)}(t_2)(t-t_2) \to +\infty$$

როცა $t \to +\infty$. მაშასადამე, საკმარისად დიდი t-სთვის გვაქვს $u^{(n-3)}(t)>0$.

თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ, რომ საკმარისად დიდი t-ებისათვის $u^{(i)}(t)>0 \quad (i=1,\dots,n-1)$. ამ შემთხვევაში $l=n-1$, რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ახლა დავუშვათ სრულდება (2.3) პირობა, მაშინ საკმარისად დიდი t-თვის გვაქვს $u^{(n-2)}(t)>0$ ან $u^{(n-2)}(t)<0$. ვთქვათ სრულდება მეორე პირობა, მაშინ (2.3)-ის თანახმად გვექნება

$$u^{(n-3)}(t)=u^{(n-2)}(t_3)+\int\limits_{t_3}^{t} u^{n-2}(s)ds \geq u^{(n-3)}(t_0)+u^{(n-2)}(t_3)(t-t_3) \to +\infty$$

როცა $t \to +\infty$, სადაც t_3 საკმარისად დიდი რიცხვია. თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ, რომ საკმარისად დიდი t-სათვის $u(t)<0$, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულობას. მაშასადამე $u^{(n-2)}(t)>0$. თუ გავაგრძელებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას, მარტივად დავადგენთ ისეთი $l \in \{0,\dots,n-1\}$ არსებობას, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება (2.1_l) პირობა.

ლემა 2.2. ვთქვათ $t_0 \in [0;+\infty)$, $u \in \tilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0;+\infty])$ და სრულდება (2.1_l) პირობები, რომელიმე $l \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია (ლუწია). მაშინ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-l-1}\left|u^{(n)}(t)\right|dt<+\infty, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds=0, \tag{2.5}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{-2} \int_{t_0}^{t} s^{n-l} \left|u^{(n)}(s)\right| ds dt < +\infty, \tag{2.6}$$

$$u^{(i)}(t) \geq u^{(i)}(t_0) + \frac{1}{(l-i-1)!\,(n-l-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{l-i-1} \int_{s}^{+\infty} (\xi - s)^{n-l-1} \left|u^{(n)}(\xi)\right| d\xi ds$$

$$(i = 0, \dots, l-1). \tag{2.7}$$

გარდა ამისა, თუ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-l} \left|u^{(n)}(t)\right| dt = +\infty, \tag{2.8}$$

მაშინ არსებობს ისეთი $t_* > t_0$, რომ

$$u(t) \geq \frac{t^{l-1}}{l!} u^{(l-1)}(t) \quad \text{როცა} \quad t \geq t_*, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(u^{(l-1)}(t) - t u^{(l)}(t)\right) = +\infty \tag{2.10}$$

$$\frac{u^{(i)}(t)}{t^{l-i}} \downarrow, \quad \frac{u^{(i)}(t)}{t^{l-i-1}} \uparrow, \quad (i = 0, \dots, l-1). \tag{2.11_l}$$

დამტკიცება. (2.1_l) პირობის თანახმად ცხადია, რომ:

$$\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} u^{(j)}(t)}{(j-i)!} = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t_0^{j-i} u^{(i)}(t_0)}{(j-i)!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} \int_{t_0}^{t} s^{k-i-1} \left|u^{(k)}(s)\right| ds. \tag{2.12_{ik}}$$

აღვნიშნოთ:

$$\Psi(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} u^{(j)}(t)}{(j-i)!},$$

$$\Phi(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t_0^{j-i} u^{(i)}(t_0)}{(j-i)!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} \int_{t_0}^{t} s^{k-i-1} \left|u^{(k)}(s)\right| ds.$$

ცხადია, რომ $\Psi(t_0) = \Phi(t_0)$ და

$$\Phi'(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} t^{k-i-1} u^{(k)}(t). \tag{2.13}$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\Psi'(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} t^{k-i-1} u^{(k)}(t). \tag{2.14}$$

მართლაც გვაქვს

$$\Psi'(t) = \left(\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} u^{(j)}(t)}{(j-i)!} \right)' = \left((-1)^j u^{(i)}(t) + \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} u^{(j)}(t)}{(j-i)!} \right)' =$$
$$= (-1)^j u^{(i+1)}(t) + \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} u^{(j)}(t)}{(j-i-1)!} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} u^{(j+1)}(t)}{(j-i)!}$$

უკანასკნელ ჯამში თუ მოვახდენთ გარდაქმნას $j+1=l$, მივიღებთ

$$\Psi'(t) = (-1)^i u^{(i+1)}(t) + \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} u^{(j)}(t)}{(j-i-1)!} + \sum_{l=i+2}^{k} \frac{(-1)^{l-1} t^{l-i-1} u^{(l)}(t)}{(l-i-1)!} =$$

$$= (-1)^i u^{(i+1)}(t) + \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} u^{(j)}(t)}{(j-i-1)!} + \sum_{l=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1} t^{l-i-1} u^{(l)}(t)}{(l-i-1)!} - (-1)^i u^{(i+1)}(t)$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1} t^{k-i-1}}{(k-i-1)!} u^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} t^{k-i-1}}{(k-i-1)!} u^{(k)}(t).$$

მაშასადამე, სრულდება (2.14) პირობა. ამიტომ (2.13) და (2.14) პირობიდან გამომდინარეობს (2.12_{ik}) ტოლობის სამართლიანობა.

თუ (2.11_{ln}) გავამრავლებთ $(-1)^{l-1}$-ზე და გავითვალისწინებთ (2.1_l) , გვექნება

$$\frac{1}{(n-l-1)!} \int_{t_0}^{t} s^{n-l-1} |u^{(n)}(s)| ds \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_0^{j-l} |u^{(j)}(t_0)|}{(j-1)!}.$$

მაშასადამე, სრულდება (2.4) პირობა.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. (2.4)-ის თანახმად, შევარჩიოთ $T > t_0$ ისე, რომ

$$\int_T^{+\infty} s^{n-l-1} \left| u^{(n)}(s) \right| ds < \varepsilon.$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds=\limsup_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^T s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds+\frac{1}{t}\int_T^t s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds\right)$$

$$\le\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^T s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds+\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_T^t s^{n-l}\left|u^{(n)}(s)\right|ds\le$$

$$\le\limsup_{t\to+\infty}\int_T^t s^{n-l-1}|u^n(s)|ds=\int_T^{+\infty} s^{n-l-1}|u^n(s)|ds<\varepsilon\,.$$

რადგან ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს (2.5) პირობის სამართლიანობა.

(2.12_{ik})-ის ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$u^{(i)}(t)=\sum_{j=i}^{k-1}\frac{u^{(i)}(s)}{(j-i)!}(t-s)^{j-i}+\frac{1}{(k-i-1)!}\int_s^t(t-\xi)^{k-i-1}u^{(k)}(\xi)d\xi\,. \qquad (2.15_{ik})$$

(2.15_{in}) ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $s\to\infty$ და გავითვალისწინებთ

(2.1_l) მივიღებთ

$$\left|u^{(i)}(t)\right|\ge\frac{1}{(n-l-1)!}\int_t^{+\infty}(s-t)^{n-i-1}\left|u^{(n)}(s)\right|ds,\quad t>t_0\quad(i=l,\dots,n-1)\,. \quad (2.16_i)$$

ანალოგიურად (2.15_{il}) -დან, როცა $s=t_0$, გვაქვს

$$\left|u^{(i)}(t)\right|\ge u^{(i)}(t_0)+\frac{1}{(l-i-1)!}\int_{t_0}^t(t-\xi)^{l-i-1}\left|u^{(l)}(\xi)\right|d\xi\quad \text{როცა}\ t\ge t_0.$$

ამრიგად (2.16_i) -ის თანახმად მივიღებთ (2.7) უტოლობას.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომ სრულდება (2.8) პირობა. თუ ვისარგებლებთ (2.1_l) პირობით, $\left(2.12_{l-1;n}\right)$-დან მივიღებთ

$$u^{(l-1)}(t)-tu^{(l)}(t)=$$

$$=\sum_{j=l-1}^{n-1}\frac{t^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\left|u^{(j)}(t)\right|+\sum_{j=l-1}^{n-1}\frac{(-1)^{j+l-1}t_0^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\left|u^{(j)}(t_0)\right|\frac{1}{(n-l)!}\int_{t_0}^t s^{n-l}|u^{(n)}(s)|ds.$$

ამრიგად, უანასკნელი ტოლობიდან (2.8)-ის თანახმად გვაქვს (2.9) უტოლობა.

ნებისმიერი $t\ge t_0$ და $i\in\{1,\dots,l\}$ -თვის აღვნიშნოთ

$$\gamma_i(t) = iu^{(l-1)}(t) - tu^{(l-i+1)}(t) = -t^{i+1}(t^{-i}u^{(l-1)}(t))' \,, \tag{2.17}$$

$$r_i(t) = tu^{(l-i+1)}(t) - (i-1)u^{(l-i)}(t) = t^i(t^{1-i}u^{(l-i)}(t))' \;. \tag{2.18}$$

(2.10)-ის თანახმად, თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, გვაქვს

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{u^{(l-i)}(t)}{t^{i-1}} = +\infty \quad (i = 1, \dots, l) \tag{2.19}$$

მართლაც (2.10)-ის თანახმად, როცა $i = 1$, (2.19)-ის სამართლიანობა ცხადია. დავუშვათ (2.19) სამართლიანია $i = i_0 \epsilon \{1, \dots, l-1\}$-თვის. მაშინ თუ ვისარგებლებთ ლოპიტალის წესით, გვექნება:

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{u^{(l-i_0-1)}(t)}{t^{i_0}} = \frac{1}{i_0}\lim_{t\to+\infty}\frac{u^{(l-i_0)}(t)}{t^{i_0-1}} = +\infty.$$

მაშასადამე (2.19) სამართლიანია ნებისმიერი $i \in \{1, \dots, l\}$-თვის. ამრიგად (2.19) და (2.18)-ის თანახმად, არსებობს ისეთი $\alpha_l \geq \dots \geq \alpha_1$, რომ $r_i(\alpha_i) > 0$ $(i = 1, \dots, l-1)$. რადგან $r_1(t) = t\,u^l(t) > 0$ და $r'_{i+1}(t) = r_i(t)$, როცა $t > t_0$, $(i = 1, \dots, l-1)$ ცხადია, რომ $r_i(t) > 0$ როცა $t \geq \alpha_{i_0}$. ანალოგიურად, (2.10)-ის თანახმად ჩვენ გვაქვს $\gamma_i(t) \to +\infty$ როცა $t \to +\infty$ და $\gamma'_{I+1}(t) = \gamma_i(t)$. მაშასადამე $\gamma_i(t) \to +\infty$, როცა $t \to +\infty$, $i = (1, \dots, l)$.

ამრიგად (2.17) და (2.18) ძალით ჩვენ მივიღებთ (2.11_l). მეორეს მხრივ (2.17)-ის თანახმად დიდი t -სთვის გვაქვს

$$iu^{(l-i)}(t) \geq t\,u^{(l-1)}(t) \quad (i = 1, \dots, l).$$

ამრიგად სამართლიანია (2.9) შეფასება.

ახლა ვაჩვენოთ (2.6) უტოლობის სამართლიანობა. მართლაც, თუ (2.8) პირობა არ სრულდება, მაშინ ცხადია (2.6) პირობა სრულდება. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (2.8) პირობა. თუ მივიღებთ მხედველობაში (2.1_ℓ) და (2.8)-ს, $(2.15_{\ell-1\,n})$-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი $t_1 > t_0$, რომ

$$\frac{1}{(n-\ell)!}\int_{t_1}^{t} s^{n-\ell}\left|u^{(n)}(s)\right|ds \leq u^{(\ell-1)}(t) - t\,u^{(\ell)}(t) \quad \text{როცა}\, t \geq t_1 .$$

ამიტომ $(2.11_{\ell-1})$-ის თანახმად გვაქვს

$$\frac{1}{(n-\ell)!}\int_{t_1}^{+\infty} s^{-2}\int_{t_1}^{s}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds \leq -\int_{-t_1}^{+\infty}\left(\frac{u^{(\ell-1)}(s)}{s}\right)' ds < +\infty.$$

ამრიგად, სრულდება (2.6) უტოლობა, რაც ამტკიცებს მოცემული ლემის სამართლიანობას.

ლემა 2.3. ვთქვათ $n \ge 2$, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, $u_0 \in \widetilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0,+\infty))$. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$u_i^{(\ell)}(t) = (-1)^i t^i u_0^{(\ell+i)}(t) \qquad (i = 1,\dots,n-\ell), \tag{2.20}$$

სადაც

$$u_i(t) = (\ell+i-1)u_{i-1}(t) - t\, u_{i-1}'(t) \qquad (i = 1,\dots,n-\ell). \tag{2.21}$$

დამტკიცება. როცა $i = 1$, (2.20) ტოლობა ცხადია. დავუშვათ ეხლა, რომ (2.20) სამართლიანია რომელიმე i-თვის $(1 \le i < n-\ell)$ და ვაჩვენოთ, რომ (2.20) ტოლობა სამართლიანი იქნება $i+1$-თვის. მართლაც, (2.21)-ის თანახმად, გვაქვს

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{(\ell)}(t) &= \big((\ell+i)u_i(t) - t u_i'(t)\big)^{(\ell)} = i\, u_i^{(\ell)}(t) - t\, u_i^{(\ell+1)}(t) = \\ &= (-1)^i\, i\, t^i\, u_0^{(\ell+i)}(t) - ((-1)^i\, t^i\, u_0^{(\ell+i)}(t))' = \\ &= i\,(-1)^i\, t^i\, u_0^{(\ell+i)}(t) - (-1)^i\, t\big(i\, t^{i-1}\, u_0^{(\ell+i)}(t) + t^i\, u_0^{(\ell+i+1)}(t)\big) = \\ &= (-1)^{i+1}\, t^{i+1}\, u_0^{(\ell+i+1)}(t). \end{aligned}$$

ამრიგად, (2.20) სამართლიანია ნებისმიერი $i \in \{1,\dots,n-\ell\}$-თვის.

ლემა 2.4. ვთქვათ $t_0 \in [0+\infty)$, $u_0 \in \widetilde{C}_{loc}^{n-1}([t_0,+\infty))$ და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია) სრულდება (2.1_ℓ) და (2.8) პირობები. მაშინ არსებობს ისეთი $t_* > t_0$, რომ

$$u(t) \ge \frac{t^\ell}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} \int_t^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1} \int_{t_*}^{s} (s-\xi)^{\ell-1} \left|u^{(n)}(\xi)\right| d\xi\, ds \quad \text{როცა} \quad t \ge t_*. \tag{2.22}$$

დამტკიცება. (2.1_ℓ) და (2.7)-ის თანახმად

$$u(t) \ge \frac{1}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\ell-1} \int_{s}^{+\infty} (\xi-s)^{n-\ell-1} \left|u^{(n)}(\xi)\right| d\xi\, ds \quad \text{როცა} \quad t \ge t_0. \tag{2. 23}$$

აღვნიშნოთ

$$u_0(t) = \frac{t^\ell}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} \int_t^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1} \int_{t_0}^{s} (s-\xi)^{\ell-1} \xi^{\,n-\ell} \left|u^{(n)}(\xi)\right| d\xi\, ds. \tag{2.24}$$

(2.6)-ის თანახმად, ცხადია, რომ (2.24) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოცემული ინტეგრალი არსებობს და სრულდება (2.21) ტოლობა, სადაც

$$u_i(t)=\frac{t^{\ell+i}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-i-1)!}\int_t^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-i-1}\int_{t_0}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds$$

$$(i=0,\dots,n-\ell-1), \tag{2.25}$$

$$u_{n-\ell}(t)=\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\ell-1}s^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(s)\right|ds.$$

მაშასადამე, 2.3 ლემის თანახმად გვაქვს

$$(-1)^{n+\ell}u_0^{(n)}(t)=\left|u^{(n)}(t)\right| \text{ როცა } \quad t\ge t_0\,, \tag{2.26}$$

სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია), (2.24), (2.26) და ლემა 2.1-ის თანახმად, არსებობს $\ell'\in\{0,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell'+n$ კენტია ($\ell'+n$ ლუწია) ისეთი, რომ

$$u_0^{(i)}(t)>0 \quad (i=0,\dots,\ell'),$$

$$(-1)^{n+\ell'}u_0^{(i)}(t)>0 \quad (i=\ell',\dots,n-1) \text{ როცა } \quad t\ge t_0\,. \qquad (2.27_{\ell'})$$

ცხადია, რომ $\ell+\ell'$ არის ლუწი რიცხვი. ეხლა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი $t_*>t_0$, რომ

$$t^{\ell-1}\le u_0(t)\le t^{\ell} \text{ როცა } \quad t\ge t_*\,. \qquad 2.28)$$

(2.24) და (2.6)-ის თანახმად ცხადია, რომ საკმარისად დიდი t-თვის $u_0(t)\le t^{\ell}$. მეორეს მხრივ (2.8)-ის თანახმად, არსებობს ისეთი $t_1>t_0$, რომ

$$\int_{t_0}^{t_1}s^{n-\ell}\left|u^{(n)}(s)\right|ds=c>(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!\,2^{n-1}.$$

ამიტომ (2.24)-დან გვაქვს

$$u_0(t)=\frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{2t}^{+\infty}(s-t)^{n-\ell-1}s^{-n-1+\ell}\int_{t_0}^{s}\left(1-\frac{\xi}{s}\right)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds\ge$$

$$\ge\frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{2t}^{+\infty}(s-t)^{n-\ell-1}s^{-n-1+\ell}\int_{t_0}^{t_1}\left(1-\frac{\xi}{s}\right)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds$$

რადგან $\left(1-\dfrac{\xi}{s}\right) \geq \dfrac{1}{2}$ როცა $t_0 \leq \xi \leq t_1$ და $s \geq 2t_1$. ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$u_0(t) \geq \frac{t^{\ell}}{2^{\ell-1}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{t_0}^{t_1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\int_{2t}^{+\infty}(s-t)^{n-\ell-1}s^{\ell-n-1}ds \geq$$

$$\geq \frac{ct^{\ell}}{2^{\ell-1}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{2t}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{s}\right)^{n-\ell-1}s^{-2}ds \geq \frac{ct^{\ell}}{2^{\ell-2}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{2t}^{+\infty}s^{-2}ds =$$

$$= \frac{ct^{\ell}}{2^{n-2}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\cdot\frac{1}{2t} = \frac{ct^{\ell-1}}{2^{n-1}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} > t^{\ell-1} \text{როცა}\, t \geq t_1.$$

მაშასადამე, საკმარისად დიდი t-სთვის სრულდება (2.28) უტოლობა. მეორეს მხრივ (2.1_{ℓ})და ($2.27_{\ell'}$)-დან თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $\ell+\ell'$ ლუწია, გამომდინარეობს, რომ $\ell=\ell'$
.

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{t\to+\infty} t^i u_0^{(\ell+i)}(t) = 0 \quad (i = 0,\ldots,n-\ell-1). \tag{2.29}$$

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ (2.25)-ს გვექნება

$$\begin{aligned} u_i^{(\ell)}(t) = {} & \frac{1}{(\ell-1)!\,(n-\ell-i-1)!}\sum_{j=0}^{\ell}C_{\ell}^{j}\left(t^{\ell+i}\right)^{(\ell-j)}\cdot \\ & \cdot\left(\int_t^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-i-1}\int_{t_0}^{s}(s-\xi)^{\ell-i}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds\right)^{(j)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

ვთქვათ $j \leq n-\ell-i-1$. მაშინ (2.6)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\rho_{ji}(t)=\left(t^{\ell+i}\right)^{(\ell-j)}\left|\left(\int_t^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-i-1}\int_{t_0}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds\right)^{(j)}\right|\leq$$

$$\leq(\ell+i)!\,(n-\ell-i-1)!t^{i+j}\int_t^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-i-j-1}\int_{t_0}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds\leq$$

$$\leq(\ell+i)!\,(n-\ell-i-1)!t^{j+i}\int_t^{+\infty}s^{-i-j-2}\int_{t_0}^{s}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds\leq$$

$$\leq(\ell+i)!\,(n-\ell-i-1)!\int_t^{+\infty}s^{-2}\int_{t_0}^{s}\xi^{\,n-2}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds.$$

აქედან (2.6)-ის თანახმად გვაქვს

$$\rho_{ji}(t)\to 0\ \text{როცა}\ t\to+\infty\quad (i=0,\ldots,n-\ell-i-1).$$

ვთქვათ $j\leq n-\ell-i-1$. მაშინ გვაქვს

$$\rho_{ji}(t)\leq(\ell+i)!\,(n-\ell-i-1)!t^{i+j}\left(t^{-n}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\right)^{(j+i+\ell-n)}=$$

$$=(\ell+i)!\,(n-\ell-i-1)!\,t^{i+j}\sum_{k=0}^{j+i+\ell-n}C^k_{j+i+\ell-n}(t^{-n})^{(j+i+\ell-k)}\times \tag{2.31}$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\right)^{(k)}.$$

მეორეს მხრივ (2.5)-ის თანახმად

$$t^{i+j}\left|(t^{-n})^{(j+i+\ell-k)}\left(\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\ell-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\right)^{(k)}\right|\leq$$

$$\leq n!\,t^{i+j}\,t^{-j-i-\ell+k}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\ell-k-1}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\leq$$

$$\leq n!\,(\ell-1)!\,t^{-1}\int_{t_0}^{t}\xi^{\,n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\to 0$$

როცა $t\to+\infty$ ($j=n-\ell-i,\ldots,\ell$). ამიტომ (2.31)-ის ძალით გვაქვს

$$\rho_{ji}(t)\to 0\ \text{როცა}\ \ t\to+\infty\quad (i=n-\ell-i,\ldots,\ell).$$

რაც ამტკიცებს (2.29) პირობის სამართლიანობას.

მაშასადამე, (2.29)-ის თანახმად

$$u_0^{(\ell)}(t) = \frac{1}{(n-\ell-1)!}\int_t^{+\infty}(s-t)^{n-\ell-i}\left|u^{(n)}(s)\right|ds \text{ როცა } t \ge t_0 .$$

მოცემული ტოლობიდან მივიღებთ

$$u_0(t) = \sum_{\ell=0}^{\ell-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}u_0^{(i)}(t_0) + \\ +\frac{1}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\ell-1}\int_s^{+\infty}(\xi-s)^{n-\ell-i}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\, ds$$

როცა $t \ge t_0$.

ამრიგად, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2.23) და (2.24)-ს გვექნება

$$u(t) \ge \frac{t^\ell}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_t^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\int_{t_0}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\, ds - c\,t^{\ell-1}, \tag{2.31}$$

სადაც $c = \sum_{\ell=0}^{\ell-1}\frac{u_0^{(i)}(t_0)}{i!}$.

(2.8)-ის თანახმად, არსებობს ისეთი $t_i > t_0$, რომ

$$\int_{t_0}^{t_1}s^{n-\ell}\left|u^{(n)}(s)\right|ds > 2^{n-1}(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!\,c.$$

ამიტომ (2.31)-ის თანახმად მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
u(t) \geq {} & \frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{t}^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\times \\
& \times\left(\int_{t_0}^{t_1}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi+\int_{t_1}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\right)ds-c\,t^{\ell-1}\geq \\
& \geq \frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{t}^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\int_{t_1}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds+ \\
& +\frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{2t}^{+\infty} s^{-n+\ell-1}(s-t)^{n-\ell-1}\cdot\int_{t_0}^{t_1}\left(1-\frac{\xi}{s}\right)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds-c\,t^{\ell-1}\geq \\
& \geq \frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\int_{t}^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\int_{t_1}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\left|u^{(n)}(\xi)\right|d\xi\,ds,
\end{aligned}
$$

რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

3. მონოტონური ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

ამ პარაგრაფში მიღებული იქნება (2.1_{ℓ}) ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები, რომლებსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმისათვის, რომ მომდევნო პარაგრაფში დადგენილი იყოს საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება.

ქვემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$
\left|F(u)(t)\right|\geq\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)}\left|u(s)\right|^{\mu(s)}d_s\,r_i(s,t) \text{ როცა } t\geq t_0,\ u\in H_{t_0,\tau}, \tag{3.1}
$$

($H_{t_0,\tau}$ სიმრავლის განმარტება იხ. მე-3 გვერდზე), სადაც

$$
0<\mu(t)\leq 1,\quad \mu_{\mathrm{j}},\tau_{\mathrm{i}},\sigma_{\mathrm{i}}\in(R_+;R_+),\quad \tau_i(t)\leq\sigma_{\mathrm{i}}(t) \text{ როცა } t\in R_+, \tag{3.2}
$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty,\ r_i:R_+\times R_+\to R_+$ არის უწყვეტი t-ს მიმართ და არაკლებადი s-ის მიმართ $(i=1,\ldots,m)$.

მოცემულ შრომაში ქვემოთ ყველგან ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:

ვთქვათ $t_0 \in R_+$, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$. U_{ℓ,t_0} -ით აღვნიშნავთ (1.1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.1 $_\ell$) პირობას

$$\Delta_{\ell,u} = \left\{ \lambda \mid \lambda \in [\ell-1,\ell], \liminf_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^\lambda} = 0 \right\}, \quad u \in U_{\ell,t_0}; \tag{3.3}$$

$$\overline{\sigma}(t) = \max\{\max(s,\sigma_1(s),\dots,\sigma_m(s)) : 0 \le s \le t\}; \tag{3.4}$$

$$h_{1\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 \text{ roca} & \lambda = \ell, \\ \varepsilon \text{ roca} & \lambda \in [\ell-1,\ell), \end{cases} \qquad h_{2\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 \text{ roca} & \lambda = \ell-1, \\ \varepsilon \text{ roca} & \lambda \in (\ell-1,\ell], \end{cases} \tag{3.5}$$
$$h_\varepsilon(\lambda) = h_{1\varepsilon}(\lambda) + h_{2\varepsilon}(\lambda).$$

შენიშვნა 3.1. $\Lambda_{\ell,u}$ სიმრავლის განმარტების შემთხვევაში, თუ არ არსებობს $\lambda \in [\ell-1,\ell]$, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-\lambda} u(t) = 0$, მაშინ იგულისხმება რომ $\Lambda_{\ell,u} = \varnothing$.

თეორემა 3.1. ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (), (), (3.1), (3.2) პირობები, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია ($\ell + n$ ლუწია),

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell} \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} s^{(\ell-1)\mu(s)} d_s\, r_i(s,t) = +\infty, \tag{3.6 $_\ell$}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1} \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} s^{\ell\,\mu(s)} d_s\, r_i(s,t) = +\infty, \tag{3.7 $_\ell$}$$

$$\liminf_{t\to+\infty} \mu(t) = \mu_0 > 0. \tag{3.8}$$

გარდა ამისა, რომელიმე $t_0 \in R_+$ -თვის $U_{\ell,t_0} = \varnothing$, მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to0} \left(\liminf_{t\to+\infty} g_\ell(t,\lambda_0,\varepsilon) \right) \le (\ell-1)!\,(n-\ell-1)!, \tag{3.9}$$

სადაც

$$g_\ell(t,\lambda_0,\varepsilon) = t^{\ell-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \int_t^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1} \left(\overline{\sigma}(s)\right)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \int_{t_0}^{s} (s-\xi)^{\ell-1} \xi^{n-\ell} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} \xi_1^{(\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0))}. \tag{3.10}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $t_0 \in R_+$ და $U_{\ell,t_0} = \varnothing$. U_{ℓ,t_0} სიმრავლის განმარტების თანახმად (1.1) განტოლებას გააჩნია $u \in U_{\ell,t_0}$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. (2.1_ℓ) და (3.1)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (2.6_ℓ) პირობა. მართლაც, (2.1_ℓ)-ის თანახმად არსებობს ისეთი $t_1 \geq t_0$ და $c \in (0,1]$, რომ

$$u(t) \geq c t^{\ell-1} \text{როცა}\, t \geq t_1.$$

ამიტომ

$$(-1)^{n+\ell} u^{(n)} t \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} \sum_{i=1}^{m} c^{\mu(s)} s^{(\ell-1)\mu(s)} d\, r_i(s,t),$$

სადაც $\ell + n$ კენტია $\ell + n$ ლუწია). მოცემულ უტოლობას თუ გავამრავლებთ $t^{\ell-1}$-ზე და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $(-1)^{n+\ell} u^{(n)}(t) \geq 0$, მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t} s^{n-\ell} \,|\, u^{(n)}(s) \,|\, ds \geq c \int_{t_1}^{t} s^{n-\ell} \sum_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)} \xi^{(\ell-1)\mu(\xi)} d_\xi\, r_i(\xi, s)\, ds.$$

საიდანაც (3.6_ℓ)-ის თანახმად გვაქვს

$$\int_{t_1}^{+\infty} s^{n-\ell} \,|\, u^{(n)}(s) \,|\, ds = +\infty.$$

ე.ი. სრულდება (2.6) პირობა. ამიტომ 2.2 ლემის თანახმად არსებობს ისეთი $c_0 \geq 0$, რომ

$$\frac{u(t)}{t^\ell} \downarrow c_0 \quad \text{როცა} \quad t \uparrow +\infty.$$

ვაჩვენოთ, რომ $c_0 = 0$. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $c_0 > 0$. მაშინ არსებობს ისეთი $t_2 > t_1$, რომ

$$u(t) \geq c_0 t^\ell \;\text{როცა}\quad t \geq t_2.$$

ამიტომ (3.1) და (2.1_ℓ)-ის თანახმად (1.1)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_2}^{+\infty} t^{n-\ell-1} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} s^{\ell\mu(s)} d_s\, r_i(s,t) = +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (2.6) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ

$$\frac{u(t)}{t^{\ell}} \downarrow 0 \text{ როცა } \quad t \uparrow +\infty. \tag{3.11}$$

2.4 ლემის თანახმად არსებობს ისეთი $t_* > t_1$, რომ

$$u(t) \geq \frac{t^{\ell}}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} \times \\ \times \int_t^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1} \int_{t_*}^{s} (s-\xi)^{\ell-1} \xi^{n-\ell} \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)} |u(\xi_1)|^{\mu(\xi_1)} d_{\xi_1} r_i(\xi_1,\xi) d\xi\, ds. \tag{3.12$_\ell$}$$

მეორეს მხრივ

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^{\ell-1}} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^{\ell}} = 0. \tag{3.13}$$

აღვნიშნოთ $\Lambda_{\ell,u}$ -ით ის $\lambda \in [\ell-1,\ell]$ სიმრავლე, რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^{\lambda}} = 0. \tag{3.14}$$

(3.13)-ის თანახმად ცხადია რომ $\Lambda_{\ell,u} \neq \varnothing$ და $\lambda_0 \in [\ell-1,\ell]$, სადაც $\lambda_0 = \inf \Lambda_{\ell,u}$. ამიტომ $\Lambda_{\ell,u} \in [\ell-1,\ell]$. (3.14)-ის ძალით გვაქვს

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0, \qquad \liminf_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty. \tag{3.15}$$

აღვნიშნოთ

$$\varphi(t) = \left(\frac{u(t)}{t^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t)} \tag{3.16}$$

და

$$\widetilde{\varphi}(t) = \min\{\varphi(s) : t_* \leq s \leq t\}. \tag{3.17}$$

(3.8) და (3.15)-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\liminf_{t\to+\infty} \left(\frac{u(t)}{t^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t)} = 0. \tag{3.18}$$

მართლაც, (3.8)-ის თანახმად არსებობს $\mu_1 > 0$ და $t_2 > t_1$ ისეთი, რომ $\mu(t) \geq \mu_1$ როცა $t \geq t_2$. ამიტომ (3.15)-ის პირველი პირობის თანახმად არსებობს $\{t_k\}$ წერტილთა მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim\limits_{t\to+\infty} t_k = +\infty$ და

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t_k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0.$$

ამიტომ საკმარისად დიდი k -თვის გვაქვს

$$\left(\frac{u(t_k)}{t_k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t_k)} \leq \left(\frac{u(t_k)}{t_k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_1} \to 0 \ \text{ როცა } \ k \to +\infty.$$

ე.ი. სრულდება (3.16) პირობა. ეხლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{t\to+\infty} t^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \cdot \widetilde{\varphi}(t) = +\infty. \tag{3.19}$$

მართლაც, (3.16) და (3.17)-ს თანახმად ნებისმიერი $t > t_*$ -თვის მოიძებნება ისეთი $s_t \in [t_*, t]$, რომ

$$\widetilde{\varphi}(t) = \left(\frac{u(s_t)}{s_t^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(t_k)}$$

და (3.15)-ის პირველი პირობის თანახმად $s_t \to +\infty$ როცა $t \to +\infty$. ამიტომ რადგან $\widetilde{\varphi}(t) \downarrow 0$ როცა $t \uparrow +\infty$, $\mu(t) \leq 1$, გვაქვს

$$t^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \ \widetilde{\varphi}(t) = t^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \left(\frac{u(s_t)}{s_t^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s_t)} \geq s_t^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \frac{u(s_t)}{s_t^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = \frac{u(s_t)}{s_t^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} \tag{3.20}$$

როცა $t \to +\infty$. მაშასადამე სრულდება (3.19) პირობა. რადგან

$$\frac{u(s_t)}{s_t^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \to 0 \ \text{ როცა } \ t \to +\infty,$$

ამიტომ (3.20)-დან გამომდინარეობს (3.19). მაშასადამე გვაქვს

$$\widetilde{\varphi}(t) \downarrow 0 \ \text{ როცა } \ t \uparrow +\infty \ \text{ და } \ \psi(t) \ \widetilde{\varphi}(t) \to +\infty \ \text{ როცა } \ t \to +\infty,$$

სადაც φ და $\widetilde{\varphi}$ მოცემულია (3.16) და (3.17) ტოლობებით, ხოლო ψ ფუნქცია მოცემულია ტოლობით $\psi(t)=t^{h_\varepsilon(\lambda_0)}$. ამიტომ 2.5 ლემის თანახმად, არსებობს $\{t_k\}_{k=3}^{+\infty}$ წერტილთა ისეთი მიმდევრობა, რომ $t_k\uparrow+\infty$ როცა $k\uparrow+\infty$ და

$$\widetilde{\varphi}\big(\overline{\sigma}(s)\big)\big(\overline{\sigma}(s)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\ge\widetilde{\varphi}\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \text{ როცა } s\ge t_k, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{\varphi}\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)=\varphi\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)=\left(\frac{u\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)}{\overline{\sigma}^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}(t_k)}\right)^{\mu\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)} \quad k=3,4,\dots, \tag{3.22}$$

სადაც $\overline{\sigma}$ ფუნქცია მოცემულია (3.4) ტოლობებით. საკმარისად დიდი k-თვის (3.12_ℓ)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned}
u\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)\ge&\frac{\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)^\ell}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\overline{\sigma}(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\big(s-\overline{\sigma}(t_k)\big)^{n-\ell-1}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\ell-1}\times\\
&\times\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\left(\frac{u(\xi_1)}{\xi_1^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\xi_1)}\cdot\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds\ge\\
&\ge\frac{\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)^\ell}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\overline{\sigma}(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\big(s-\overline{\sigma}(t_k)\big)^{n-\ell-1}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\times\\
&\times\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\widetilde{\varphi}(\xi)\,\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds,
\end{aligned}$$

სადაც $\widetilde{\varphi}$ ფუნქცია მოცემულია (3.16) და (3.17) ტოლობებით. აქედან $\overline{\sigma}$ ფუნქციის განმარტების და $\widetilde{\varphi}$ ფუნქციის არაზრდადობის თანახმად, უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$\begin{aligned}
u\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)\ge&\frac{\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)^\ell}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\sigma(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\big(s-\overline{\sigma}(t_k)\big)^{n-\ell-1}\int_{t_*}^{s}(s-t)^{\ell-1}\xi^{\ell-1}\widetilde{\varphi}\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)\times\\
&\times\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds\ge\\
&\ge\frac{\big(\overline{\sigma}(t_k)\big)^\ell}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\sigma(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\big(s-\overline{\sigma}(t_k)\big)^{n-\ell-1}\widetilde{\varphi}\big(\overline{\sigma}(s)\big)\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\times\\
&\times\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds=
\end{aligned}$$

$$=\frac{\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{\ell}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\sigma(t_k)}^{+\infty} s^{-n}\left(s-\overline{\sigma}(t_k)\right)^{n-\ell-1}\widetilde{\varphi}\left(\overline{\sigma}(s)\right)\cdot\left(\overline{\sigma}(s)\right)^{h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\cdot$$

$$\cdot\left(\overline{\sigma}(s)\right)^{-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\cdot\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds.$$

აქედან (3.21) და (3.22)-ის თანახმად, მივიღებთ

$$u\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)\geq\frac{\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\left(u\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)\right)^{\mu\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!\ \left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)}}\int_{\overline{\sigma}(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\left(s-\overline{\sigma}(t_k)\right)^{n-\ell-1}\times$$

$$\times\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{-h_{\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds.$$

აქედან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა

$$\left(\frac{u\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)}{\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{1-\mu(\overline{\sigma}(t_k))}\geq\frac{\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{\ell-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}{(\ell-1)!(n-\ell-1)!}\int_{\overline{\sigma}(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\left(s-\overline{\sigma}(t_k)\right)^{n-\ell-1}\times$$

$$\times\left(\overline{\sigma}(s)\right)^{-h_{\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{\ell-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds.$$

რადგან $\dfrac{u\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)}{\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\to 0$ როცა $k\to+\infty$ და $\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)\leq 1$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან საკმარისად დიდი k -სთვის მივიღებთ

$$\limsup_{k\to+\infty}\left(u\left(\overline{\sigma}(t_k)\right)\right)^{\ell-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{\overline{\sigma}(t_k)}^{+\infty}s^{-n}\left(s-\overline{\sigma}(t_k)\right)^{n-\ell-1}\left(\overline{\sigma}(s)\right)^{-h_{\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds\leq(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

მაშასადამე

$$\liminf_{k\to+\infty}\ t^{\ell-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{t}^{+\infty}s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\left(\overline{\sigma}(s)\right)^{-h_{\varepsilon}(\lambda_0)}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds\leq(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\liminf_{k\to+\infty} g_\ell(t,\lambda_0,\varepsilon)\right)\le(\ell-1)!(n-\ell-1)!,$$

სადაც g_ℓ ფუნქცია მოცემულია (3.10) ტოლობით, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.2. ვთქვათ სრულდება 3.1 თეორემის პირობები და

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\ \frac{t}{\sigma_i(t)}>0\quad (i=1,\ldots,m), \tag{3.23}$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$, რომ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{k\to+\infty} g_{\ell,1}(t,\lambda_0,\varepsilon)\right)\le(\ell-1)!(n-\ell-1)!, \tag{3.24}$$

სადაც

$$\begin{aligned} g_{\ell,1}(t,\lambda_0,\varepsilon)&=t^{\ell-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}\int_t^{+\infty}s^{-n-h_\varepsilon(\lambda_0)}\left(s-t\right)^{n-\ell-1}\xi^{n-\ell-1}\int_{t_*}^{s}\left(s-\xi\right)^{\ell-1}\xi^{n-\ell}\times\\ &\times\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}r_i(\xi_1,\xi)\,d\xi\,ds.\end{aligned} \tag{3.25}$$

დამტკიცება. (3.23) და (3.4)-ის თანახმად ცხადია არსებობს ისეთი $t\in R_+$ და $c>0$, რომ

$$\frac{t}{\overline{\sigma}(t)}\ge c\quad \text{როცა}\quad s\ge t_2, \tag{3.26}$$

სადაც $\overline{\sigma}$ ფუნქცია მოცემულია (3.4) ტოლობით. (3.26)-ის თანახმად გვაქვს

$$g_\ell(t,\lambda_0,\varepsilon)\ge c^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\cdot g_{\ell,1}(t,\lambda_0,\varepsilon)\ \text{როცა}\quad s\ge t_2>t_0\,, \tag{3.27}$$

სადაც g_ℓ და $g_{\ell,1}$ ფუნქციები მოცემულია შესაბამისად (3.10) და (3.25) ტოლობებით. (3.26) უტოლობიდან გვაქვს

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\ g_\ell(t,\lambda_0,\varepsilon)\ge c^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\liminf_{k\to+\infty}\ g_{\ell,1}(t,\lambda_0,\varepsilon).$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (3.5) და (3.9) გვექნება

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty}\ g_{\ell,1}(t,\lambda_0,\varepsilon)\right)\le \limsup_{\varepsilon\to 0} c^{-h\varepsilon(\lambda_0)}\cdot \limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty}\ g_{\ell}(t,\lambda_0,\varepsilon)\right)=$$

$$=\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty}\ g_{\ell}(t,\lambda_0,\varepsilon)\right)\le(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

ე.ი. სრულდება (3.24) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

4. მონოტონური ამონახსნების არარსებობის საკმარისი პირობები

მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას არ გააჩნდეს წესიერი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას.

თეორემა 4.1. ვთქვათ სრულდება (1.2), ((1.3)), (3.1), (3.2), (3.6_ℓ)-(3.8) პირობები, $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ნებისმიერი $\lambda\in[\ell-1,\ell]$-თვის სრულდება პირობა

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} g_{\ell}(t,\lambda,\varepsilon)\right)>(\ell-1)!(n-\ell-1)! \tag{4.1_ℓ}$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0\in R_+$, $U_{\ell,t_0}=\varnothing$, სადაც g_ℓ ფუნქცია მოცემულია (3.10) ტოლობით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $t_0\in R_+$ და $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) ისეთი, რომ $U_{\ell,t_0}\ne\varnothing$.ამრიგად, (1.1) განტოლებას გააჩნია $u:[t_0,+\infty)\to(0,+\infty)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1_ℓ) პირობას. სრულდება 3.1 თეორემის პირობები. ამიტომ არსებობს ისეთი $\lambda_0\in[\ell-1,\ell]$, რომ სრულდება (3.9) პირობა. რაც ეწინააღმდეგება (4.1_ℓ) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თუ ვისარგებლებთ 3.2 თეორემით, ანალოგიურად ვაჩვენებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.2. ვთქვათ სრულდება (1.2), ((1.3)), (3.1), (3.2), (3.6_ℓ)-(3.8) და (3.23) პირობები, $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ნებისმიერი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$-თვის სრულდება პირობა

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\Big(\liminf_{t\to+\infty} g_{\ell,1}(t,\lambda,\varepsilon)\Big) > (\ell-1)!(n-\ell-1)! \qquad (4.2_\ell)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$, $U_{\ell,t_0} = \varnothing$, სადაც $g_{\ell,1}$ ფუნქცია მოცემულია (3.25) ტოლობით.

თეორემა 4.3. ვთქვათ სრულდება (1.2), ((1.3)), (3.1), (3.2), (3.6_ℓ)-(3.8) და (3.23) პირობები, სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ნებისმიერი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$-თვის არსებობს ისეთი $\gamma > 1$, რომ სრულდება პირობა

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_0^t s^{n-1}\sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)} \xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)} d_\xi r_i(\xi,s)ds\right) > \gamma \prod_{i=0,\ i\neq \ell-1}^{n-1} |\lambda - i| . \qquad (4.3_\ell)$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_+$ გვაქვს $U_{\ell,t_0} = \varnothing$.

დამტკიცება. 4.2 თეორემის თანახმად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.3_ℓ) პირობიდან გამომდინარეობს (4.2_ℓ) უტოლობა. განვიხილოთ შემთხვევა $\ell = 1$. მაშინ (4.3_ℓ) თანახმად არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$ და $t_1 > t_0$, რომ

$$t^{-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_0^t s^{n-1}\sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)} \xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)} d_\xi r_i(\xi,s)ds > \gamma \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda - i|, \qquad (4.4)$$

როცა $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $t \ge t_1$.

(3.25_1)-ის და (4.4)-ის თანახმად გვაქვს

$$g_{1,1}(t,\lambda,\varepsilon) \ge \gamma \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda - i|\, t^{1-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-2}\, s^{-n-h_\varepsilon(\lambda)+h_{1\varepsilon}(\lambda)+\lambda} ds =$$

$$= \gamma \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda - i|\, t^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-2}\, s^{-n-h_{2\varepsilon}(\lambda)+\lambda} ds = \frac{(n-2)!\,\gamma \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda - i|}{\prod_{i=1}^{n-1} \big|\lambda - i - h_{2\eta}(\lambda)\big|}$$

როცა $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $t \ge t_1$.

რადგან $\gamma > 1$, ამიტომ არსებობს ისეთი $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$, რომ

$$g_{1,1}(t,\lambda,\varepsilon)\geq (n-2)!+\delta \text{ როცა } 0<\varepsilon\leq\varepsilon_1,\ \ t\geq t_1,$$

სადაც $\delta>0$. მაშასადამე სრულდება (4.2_1) უტოლობა.

ეხლა ვიგულისხმოთ $\ell>1$. ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.2_ℓ) პირობა. მართლაც (4.3_ℓ)-ის თანახმად გვაქვს

$$g_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)=t^{\ell-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\int_t^{+\infty}s^{-n-h_\varepsilon(\lambda)}(s-t)^{n-\ell-1}\int_t^s(s-\xi)^{\ell-1}d\int_{t_*}^{\xi}\xi^{n-\ell}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi_1)}^{\sigma_i(\xi_1)}\xi_2^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi_2)}d_{\xi_2}(\xi_2,\xi_1)ds=$$
$$=(\ell-1)t^{\ell-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\int_t^{+\infty}s^{-n-h_\varepsilon(\lambda)}(s-t)^{n-\ell-1}\int_{t_*}^s(s-\xi)^{\ell-2}d\int_{t_*}^{\xi}\xi_1^{n-\ell}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi_1)}^{\sigma_i(\xi_1)}\xi_2^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi_2)}d_{\xi_2}(\xi_2,\xi_1)d\xi_1\,ds.$$

(4.4)-ის თანახმად აქედან მივიღებთ

$$g_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)\geq\gamma(\ell-1)\prod_{i=0;\,i\neq\ell-1}^{n-1}|\lambda-i|\,t^{\ell-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_t^{+\infty}s^{-n-h_\varepsilon(\lambda)}(s-t)^{n-\ell-1}\times$$
$$\times\int_{t_0}^s(s-\xi)^{\ell-2}\xi^{1+\lambda+h_\varepsilon(\lambda)-\ell}d\xi\,ds \tag{4.5}$$

მეორეს მხრივ

$$\int_{t_0}^s(s-\xi)^{\ell-2}\xi^{1+\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)-\ell}d\xi=\frac{(\ell-2)!\ s^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)}(1+o(1))}{\prod\limits_{i=0}^{\ell-2}\left|\lambda-i-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right|}.$$

ამიტომ (4.5)-დან გვაქვს

$$g_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)\geq\frac{\gamma(\ell-1)!\ \lambda^{\ell-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}}{\prod\limits_{i=0}^{\ell-2}\left|\lambda+h_{1\varepsilon}-1\right|}\int_t^{+\infty}s^{-h-h_{2\varepsilon}(\lambda)+\lambda}(s-t)^{h-\ell-1}ds(1+0(t))\prod_{i=0,\,i\neq\ell-1}|\lambda-1|=$$
$$=\frac{\gamma(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!\,(1+o(1))}{\prod\limits_{i=0}^{\ell-2}\left|\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)-i\right|\ \prod\limits_{i=\ell}^{n-1}\left|\lambda-i-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right|}\ \prod_{i=0,\,i\neq\ell-1}|\lambda-1|.$$

ამიტომ არსებობს ისეთი $\gamma_1\in(1,\gamma)$, რომ

$$\liminf_{\varepsilon\to0+}\left(\liminf_{t\to+\infty}g_{\ell,1}(t,\varepsilon,\lambda)\right)>\gamma_1(\ell-1)!(n-\ell-1)!$$

მაშასადამე სრულდება 4.2 თეორემის პირობები, რაც ამტკიცებს მოცემული თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 4.4. ვთქვათ სრულდება (1.2), ((1.3)), (3.1), (3.2), (3.6$_\ell$)-(3.8) და (3.23) პირობები, სადაც $\ell+n$ კენტია ($\ell+n$ ლუწია) და ნებისმიერი $\lambda\in[\ell-1,\ell]$-თვის არსებობს ისეთი $\gamma>1$, რომ

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t s^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)}d_\xi(\xi,s)\,ds\right)>\gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|. \tag{4.6}$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0\in R_+$ -თვის გვაქვს $U_{\ell,t_0}=\varnothing$.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.6) პირობიდან გამომდინარეობს (4.3$_\ell$) პირობა. (4.6)-ის თანახმად მოიძებნებაისეთი $t_1>t_0$ და $\varepsilon_1>0$, რომ

$$t^{-1}\int_1^t s^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)}d_\xi\, r_i(\xi,s)\,ds>\gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|\,\text{როცა}\,t\ge t_1,\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_1)\,.$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}
&t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^t s^{n-\ell}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)}d_\xi\, r_i(\xi,s)\,ds=\\
&=t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^t s^{n-\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda)}d\int_1^s\xi^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)}\xi_1^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)}d_{\xi_1}\, r_i(\xi_1,\xi)\,ds=\\
&=t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\cdot t^{\lambda-\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^t s^{n-\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}\, r_i(\xi_1,\xi)\,ds+\\
&+(\ell-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^t s^{n-\lambda-1+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^s\xi^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(\xi)}^{\sigma_i(\xi)}\xi_1^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi_1)}d_{\xi_1}\, r_i(\xi_1,\xi)\,ds\ge\\
&\ge\gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|\left(1+\frac{\ell-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}{\lambda+1-\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\right)=\gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|\cdot\frac{1}{\lambda+1-\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\,.
\end{aligned}$$

მაშასადამე

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to+\infty}\ t^{\ell-1-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\int_1^t s^{n-\ell}\sum_{i=1}^m\int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)}d_\xi\, r_i(\xi,s)\,ds>\\
&>\frac{\gamma}{\lambda+1-\ell+h_{1\varepsilon}(\lambda)}\cdot\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|.
\end{aligned}$$

რადგან $\gamma > 1$, ამიტომ

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t s^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m \int_{\tau_i(s)}^{\sigma_i(s)} \xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\xi)} d_\xi(\xi,s)\,ds\right) > \gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda - i|.$$

ე.ი. სრულდება (4.3_ℓ) პირობა. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

5. დიფერენციალური განტოლებები A და B თვისებებით

მე-4 პარაგრაფში მიღებული შედეგების გამოყენებით მარტივად მტკიცდება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება.

თეორემა 5.1.ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.2), (3.1), (3.2) პირობები, ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$-თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია სრულდება (3.6_ℓ)-(3.8), (4.1_ℓ) პირობები და კენტი n -ის შემთხვევაში

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}\sum_{i=1}^m \big(r_i(\sigma_i(t),t) - r_i(\tau_i(t),t)\big)dt = +\infty. \tag{5.1}$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u:[t_0,+\infty)\to(0,+\infty)$ (შემთხვევა როცა $u(t)<0$ განიხილება ანალოგიურად). (1.2) და 2.1 ლემის თანახმად არსებობს ისეთი $\ell \in \{0,\ldots,n-1\}$, რომ ამონახსნი $\ell + n$ კენტია და სრულდება (2.1_ℓ) უტოლობა. რადგან ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია, სრულდება (4.1_ℓ) პირობა, ამიტომ4.1 თეორემის თანახმად $\ell \notin \{0,\ldots,n-1\}$. მაშასადამე n კენტია და $\ell = 0$. ამ შემთხვევაში ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (1.4) პირობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ არსებობს ისეთი $c\in[0,1]$ და $t_1 > t_0$, რომ $u(\sigma_i(t)) \ge c$ როცა $t \ge t_1$. ამიტომ (1.1)-დან (2.1), (3.1) და (2.1_0)-ის თანახმად გვაქვს

$$\sum_{i=1}^m (n-i-1)!\left|u^{(i)}(t_1)\right| \ge c\int_{t_1}^t s^{n-1}\sum_{i=1}^m \big(r_i(\sigma_i(s),s) - r_i(\tau_i(s),s)\big)ds \text{ როცა } t \ge t_1.$$

ეს უკანასკნელი უტოლობა ეწინააღმდეგება (5.1) პირობას, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თუ გავითვალისწინებთ 4.2-4.4 თეორემებს, ანალოგიურად ვაჩვენებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას

თეორემა 5.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.2), (3.1), (3.2) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$-თვის, სადაც $\ell+n$ კენტია სრულდება (3.6$_\ell$)-(3.8), (4.2$_\ell$) (სრულდება (4.3$_\ell$) ან (4.4$_\ell$) პირობები. გარდა ამისა, თუ კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

თეორემა 5.3. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.2) და

$$\left|F(n)(t)\right| \ge \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \int_{\alpha_i t}^{\beta_i t} \left|u(s)\right|^{1-\frac{d}{\ln s}} ds \text{ როცა } t \ge t_0,\ u \in H_{t_0,\tau}, \tag{5.2}$$

სადაც $p_i \in C(R_+, R_+),\ \alpha_i, \beta_i \in (0,+\infty),\ d \in [0,+\infty)$. მაშინ პირობა

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t s^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{m} p_i(s)\right)^{\frac{1}{m}} ds > \frac{1}{m}\max\left\{\frac{\ell^{\lambda d}(1+\lambda)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{\prod_{i=1}^{m}\left(\beta_i^{\lambda+1}-\alpha_i^{\lambda+1}\right)^{\frac{1}{m}}} : \lambda \in [0,n-1]\right\} \tag{5.3}$$

საკმარისია იმისთვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია რომ (5.3) პირობიდან გამომდინარეობდეს (4.4t) პირობა ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$, სადაც $\ell+n$ კენტია, გარდა ამისა, ცხადია სრულდება (5.1) პირობა, სადაც $r_i(s,t) = p_i(t)s$, $\tau_i(t) = \alpha_i(t),\ \sigma_i(t) = \beta_i t$. მართლაც, ამ შემთხვევაში (5.1) პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(t)(\beta_i t - \alpha_i t) dt = +\infty.$$

მაშასადამე

$$\int_0^{+\infty} t^n \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, dt = +\infty. \tag{5.4}$$

მეორესმხრივ, მარტივიაჩვენებაიმისა, რომ (5.3) პირობიდანგამომდინარეობს

$$\int_0^{+\infty} t^n \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{m} p_i(t)\right)^{\frac{1}{m}} dt = +\infty. \tag{5.5}$$

მაგრამ, რადგანაც $\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\,dt \ge \left(\prod_{i=1}^{m} p_i(t)\right)^{\frac{1}{m}}$, ამიტომ (5.5)-დან გამომდინარეობს (5.4)-ის სამართლიანობა. რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ (3.1) უტოლობის მაგივრად სრულდება უტოლობა

$$|F(u)(t)| \ge \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\left|u(\delta_i(t))\right|^{\mu(t)} \tag{5.6}$$

როცა $t \ge t_0$, $u \in H_{t_0,\tau}$, სადაც $\delta_i \in C(R_+;R_+)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta_i(t) = +\infty$,

$$p_i \in L_{loc}(R_+;R_+), \quad \mu \in C(R_+;(0,+\infty)), \quad \lim_{t\to+\infty} \mu(t) > 0, \quad \mu(t) \le 1 \quad (i=1,\ldots,m). \tag{5.7}$$

თეორემა 5.4. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.2), (5.6), (5.7) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [\ell-1,\ell]$, $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$-თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} g_\ell^\delta(t,\lambda,\varepsilon)\right) > (\ell-1)!\,(n-\ell-1)!\,, \tag{5.8}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\left(\delta_i(t)\right)^{(\ell-1)\mu(t)} dt = +\infty, \tag{5.9}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\left(\delta_i(t)\right)^{\ell} dt = +\infty, \tag{5.10}$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება, სადაც g_ℓ^δ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით

$$g_\ell^\delta(t,\varepsilon,\lambda) = t^{\ell-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\int_t^{+\infty} s^{-n}(s-t)^{n-\ell-1}\left(\overline{\delta}(s)\right)^{-h_\varepsilon(\lambda)}\int_{t_*}^{s}(s-\xi)^{\ell-1}\left(\delta(\xi)\right)^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_i(s)} d\xi\, ds,$$

$h_{1\varepsilon}$, $h_{2\varepsilon}$ და h_ε ფუნქციები მოცემულია (3.5) ტოლობებით,

$$\overline{\delta}(t) = \max\left\{\max(s,\delta_i(s):\delta_m(s)) : 0 \le \delta \le t\right\}, \eta_i(t) = \delta_i\,.$$

დამტკიცება. (5.6)-ის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (3.1) უტოლობა, სადაც

$$\tau_i(t) = \delta_i(t) - 1, \quad \sigma_i(t) = \delta_i(t), \quad r_i(s,t) = p_i(t)\ \ell(s-\delta_i(t)),$$

სადაც

$$\ell(t)=\begin{cases}0, & t\in(-\infty,0),\\ 1, & t\in[0,+\infty).\end{cases} \tag{5.11}$$

მაშასადამე, თუ მივიღებთ მხედველობაში (1.2), (5.6)-(5.10) პირობებს, ცხადია სრულდება 4.1 თეორემის პირობები. რაც ამტკიცებს მოცემული თეორემის სამართლიანობას.

თუ გავითვალისწინებთ 4.4 თეორემას, ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 5.5. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, სრულდება (1.2), (5.6)-(5.10) პირობები და ნებისმიერი $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$ და $\lambda\in[\ell-1,\ell]$-თვის, სადაც $\ell+n$ კენტია არსებობს $\gamma>1$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t s^{n-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^m p_i(s)(\delta_i(s))^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu(\delta_i(s))}ds\right)>\gamma\prod_{i=0}^{n-1}|\lambda-i|,$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

შედეგი 5.1. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, სრულდება (1.2) და

$$|F(u(t))|\geq\sum_{i=1}^m p_i(t)|u(\alpha_i t)|^{1-\frac{d}{\ln t}},\quad t\geq t_0,\ u\in H_{t_0,\tau}, \tag{5.12}$$

სადაც $p_i\in C(R_+;R_+),\ \ \alpha_i\in(0,+\infty)\ \ (i=1,\dots,m).$ მაშინ იმისათვის რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t s^n\left(\prod_{i=1}^m p_i(s)\right)^{\frac{1}{m}}ds>\frac{1}{m}\max\left\{\ell^{\lambda d}\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1):\lambda\in[0,n-1]\right\}.$$

თეორემა 5.6.ვთქვათ $F\in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1), (3.2) და ნებისმიერი $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$, სადაც $\ell+n$ ლუწია სრულდება (3.6_ℓ)-(3.8), (4.1_ℓ) და (3.6_n) პირობები. გარდა ამისა, თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1), მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u[t_0,+\infty)\to(0,+\infty)$. (1.3) და ლემა 2.2-ის თანახმად, არსებობს ისეთი $\ell\in\{1,\dots,n\}$, რომ $\ell+n$ ლუწია და სრულდება (2.1_ℓ) უტოლობა. რადგან ნებისმიერი $\ell\in\{1,\dots,n-2\}$, სადაც $\ell+n$ ლუწია სრულდება (4.1_ℓ) პირობა, ამიტომ 4.1 თეორემის თანახმად, $\ell\notin\{1,\dots,n-2\}$. მაშასადამე n ლუწია და $\ell=0$ ან $\ell=n$. პირველ შემთხვევაში 5.1 თეორემის შემთხვევაში ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (1.4)

პირობა. დავუშვათ $\ell = n$. მაშინ (2.1_n)-ის თანახმად, ცხადია, რომ არსებობს ისეთი $c > 0$, რომ საკმარისად დიდი t-თვის $u(t) \ge c\,t^{n-1}$). ამიტომ (3.1)-ის თანახმად, (1.1)-დან გვაქვს

$$u^{(n-1)}(t) \ge c\int_{t_1}^{t}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i(t)}^{\sigma_i(t)} s^{(n-1)\mu(s)} d_s\, r_i(s,t)\,dt \text{ როცა } t \ge t_1.$$

ამიტომ (3.6)-ის თანახმად ცხადია სრულდება (1.5) პირობა. ე.ი. (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

თუ გავითვალისწინებთ 5.1-5.7 თეორემების დამტკიცებას, მარტივად ვაჩვენებთ, ქვემოთ მოყვანილი თეორემების სამართლიანობას.

თეორემა 5.7. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1), (3.2) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n\}$, სადაც $\ell = n$ ლუწია სრულდება (3.6_ℓ)-(3.8), (4.2_ℓ) (სრულდება (4.3_ℓ) ან (4.4_ℓ))პირობები. გარდა ამისა, თუ ლუწი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

თეორემა 5.8. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (5.2) პირობები. მაშინ პირობა

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t s^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{m} p_i(s)\right)^{\frac{1}{m}} ds > \frac{1}{m}\max\left\{\frac{-\ell^{\lambda d}\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{\left(\prod_{i=1}^{m}\left(\beta_i^{\lambda+1}-\alpha_i^{\lambda+1}\right)\right)^{\frac{1}{m}}} : \lambda \in [0,n-1]\right\}$$

საკმარისია იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნეს B თვისება.

შედეგი 5.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (5.12) პირობები და

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t s^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} p_i(s)\right)^{\frac{1}{m}} ds >$$
$$> \frac{1}{m}\max\left\{-\ell^{\lambda d}\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{-\frac{\lambda}{m}}\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) : \lambda \in [0,n-1]\right\},$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

ლიტერატურა

1. Kneser A., Untersuchungen über die reelen nullstellen der integral linear differentatilgleichungen. *Math. Ann.* 42 (1893), 409-435.
2. Kondrat'ev V. A., On oscillations of solutions of the equation $y^{(n)}+p(x)\,y=0$. *Trudy Moscov. Mat. Obshch.* 10 (1961, 419-436.
3. Rab M., Kriterien für die oszillation der lozungen der differentialgleichung $[p(x)\,y']'+q(x)\,y=0$. *Časop. Pest. Mat.* 84 (1959),N 3, 335-370.
4. Chanturia T., Integral criteria of oscillation of solutions of higher order linear differential equations I, II. *Differential'nyeUravnenia* 16 (1980), N 5, 470-482, 16 (1980), N 4, 635-644.
5. Koplatadze R., Quasi-linear functional differential equations with Property A. *J. Math. Anal. Appl.* 330 (2007), 483-510.
6. Koplatadze R., Litsyn E., Oscillation criteria for higher order "almost linear" functional differential equation. *Funct. Differ. Equ.* 16 (2009), N 3, 387-434.