ივ. ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ალგებრის ქვემიმართულება

კახაბერ შენგელია

სასრულ ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა

დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი

მიხეილ ამაღლობელი

თბილისი

2015

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ჯგუფთა თეორიაში პირველი მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა ფრანგმა მათემატიკოსმა ე. გალუამ (1811-1832) ალგებრული განტოლებების რადიკალებში ამოხსნის გამოკვლევის დროს. სახელდობრ, მან 1830 წელს შემოიტანა ჯგუფის ცნება და შეეცადა გაეგო როგორ არის ისინი აგებული. 1832 წელს გალუამ შემოიტანა ნორმალური ქვეჯგუფის ცნება, მარტივი ჯგუფის ცნება და დაამტკიცა თეორემა n-ური ხარისხის ნიშანცვლადი ჯგუფის მარტივობის შესახებ, როცა n≥5.

სასრულ ჯგუფთა თეორიაში არსებით როლს თამაშობს მაქსიმალური p-ქვეჯგუფები. ამ ნაშრომში ჩვენ დავამტკიცებთ სასრული ჯგუფების შესახებ სილოვის შემდეგ თეორემას: ყოველი p^{α} ხარისხისათვის , რომელიც ყოფს ჯგუფის რიგს, არსებობს p^{α} რიგის ქვეჯგუფი, ამასთან თუ $p^{\alpha+1}$ ყოფს ჯგუფის რიგს, მაშინ ყოველი p^{α} რიგის ქვეჯგუფი იმყოფება რომელიღაც $p^{\alpha+1}$ ქვეჯგუფში. ჯგუფის ყველა მაქსიმალური p-ქვეჯგუფები წყვილ-წყვილად შეუღლებულია, ხოლო მათი რიცხვი სადარია 1-ის მოდულით p. ნორვეგიელი მათემატიკოსის ლ. სილოვის მიერ 1872 წელს დამტკიცებული ეს თეორემა იქცა სასრულ ჯგუფთა თეორიის ქვაკუთხედად. ამ თეორემასთან დაკავშირებით და მისი ავტორის პატივსაცემად სასრული ჯგუფების მაქსიმალურ p-ქვეჯგუფებს **სილოვის** p-ქვეჯგუფები ეწოდება.

კერძოდ, სილოვის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სასრული ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფები - ეს ზუსტად p^k რიგის ქვეჯგუფებია, სადაც p^k არის p-ს მაქსიმალური ხარისხი, რომელზედაც იყოფა ჯგუფის რიგი. აღვნიშნოთ, რომ თუ m მარტივი რიცხვი ყოფს G სასრული ჯგუფის რიგს, მაგრამ არ არის მარტივი რიცხვის ხარისხი, მაშინ G-ში შეიძლება არც იყოს m რიგის ქვეჯგუფი. მაგალითად, 12 რიგის A_4 ნიშანცვლად ჯგუფში არ არის 6 რიგის ქვეჯგუფები.

მარტივ ჯგუფთა განსაკუთრებული როლი აიხსნება იმით, რომ ნებისმიერი სასრული ჯგუფი გარკვეული წესებით შეიძლება აიგოს მარტივი ჯგუფებისაგან. მარტივ ჯგუფთა ტრივიალური მაგალითია მარტივი რიგის ციკლური ჯგუფები. აშკარაა, რომ ერთადერთი მარტივი აბელური ჯგუფია. მარტივ სასრულ ჯგუფთა კლასიფიკაცია განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი და მთავარი პრობლემაა სასრულ ჯგუფთა თეორიაში, თუმცა არ ამოწურავს ამ თეორიის მთელ შინაარსს.

ამ ნაშრომის მოკრძალებული მიზანია მივუთითოთ მარტივ სასრულ ჯგუფთა ორი კლასიკური სერია - ნიშანცვლადი ჯგუფები და პროექციული სპეციალური წრფივი ჯგუფები.

§1. ძირითადი განსაზღვრებები

ამბობენ, რომ G სიმრავლეზე განსაზღვრულია **ბინარული** ოპერაცია, თუ G-ს ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის ცალსახადაა განსაზღვრული ელემენტი $a \cdot$ b G-დან. ბინარული ოპერაცია შეიძლება აღინიშნოს არამარტო ·-ით, არამედ ნებისმიერი სხვა სიმბოლოთი, მაგალითად +, *, ˚, ... ჩვეულებრივ წერენ ab-ს ნაცვლად a·b-სი. ოპერაციის ჩაწერას ·-ით ზოგჯერ უწოდებენ მულტიპლიკაციურ ჩაწერას, ხოლო ჩაწერას +-ით უწოდებენ ადიციურ ჩაწერას.

არაცარიელ G სიმრავლეს მასზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციით, ეწოდება **ჯგუფი**, თუ:

1) (ab)c=a (bc) ნებისმიერი a, b, c ელემენტებისათვის G-დან (ოპერაცია **ასოციაციურია**)
2) არსებობს ისეთი ელემენტი e G-დან (მას ეწოდება **ერთეული**), რომ ae=ea=a, ნებისმიერი a-სთვის G-დან
3) ნებისმიერი a-სათვის G-დან G-ში არსებობს ისეთი ელემენტი b (მას ეწოდება a-ს **შებრუნებული**), რომ ab=ba=e

ერთეულოვანი ელემენტის აღნიშვნისთვის იყენებენ აგრეთვე სიმბოლო 1-ს, თუ ოპერაცია აღინიშნება ·-ით და სიმბოლო 0-ს, თუ ოპერაცია აღინიშნება +-ით.
G ჯგუფს ეწოდება **აბელური**, ან კომუტაციური ჯგუფი, თუ ab=ba, ნებისმიერი a და b-სთვის G-დან.

G ჯგუფის |G| სიმძლავრეს ეწოდება G **ჯგუფის რიგი**. თუ ეს სიმძლავრე სასრულია, მაშინ G-ს ეწოდება **სასრული** ჯგუფი, წინააღმდეგ შემთხვევაში **უსასრულო**. სასრულ G ჯგუფს ეწოდება p-ჯგუფი, თუ $|G| = p^k$ რომელიღაც მარტივი p რიცხვისათვის და ნატურალური k≥1-სთვის.

ჯგუფში ასოციაციურობის გამო მისი ნებისმიერი $a_1, a_2, \dots, a_n$ ელემენტების ნამრავლი გარკვეული რიგით (ჯგუფური ოპერაციის შესაძლო არაკომუტაციურობის გამო) არ არის დამოკიდებული ფრჩხილების განლაგებაზე და შეიძლება ჩაიწეროს $a_1\ a_2 \dots\ a_n$ სახით.

a ელემენტის ტოლი n ელემენტის ნამრავლს ეწოდება a ელემენტის n-ური **ხარისხი** და აღინიშნება a^n-ით. a ელემენტის **უარყოფითი ხარისხები** შეიძლება განისაზღვროს, ან როგორც ამ ელემენტის დადებითი ხარისხების შებრუნებული ელემენტები ჯგუფიდან, ან როგორც a^{-1} ელემენტის ტოლი რამდენიმე ელემენტის ნამრავლი: $a^n = (a^{-1})^{-n}$, n<0. შევთანხმდეთ, a ელემენტის **ნულოვანი** a^0 **ხარისხის** ქვეშ გვესმოდეს e ელემენტი: $a^0 = e$.

თუ $a^n = e$ რომელიმე n>0-სთვის, მაშინ ასეთ უმცირეს n-ს ეწოდება a **ელემენტის რიგი** და აღინიშნება $|a|$=n. აღვნიშნოთ, რომ $a^m = e \leftrightarrow$ m ყოფს n-ს.

თუ $a^n \neq e$ ნებისმიერი n>0-სთვის, მასინ ამბობენ, რომ a **უსასრულო რიგის ელემენტია** და წერენ $|\ a\ |$=∞.

G და G^* ჯგუფებს ეწოდებათ **იზომორფული** და წერენ $G \approx G^*$, თუ არსებობს **იზომორფიზმი** φ:G→ G^*, ე.ი. ისეთი ურთიერთცალსახა φ ასახვა G ჯგუფიდან მთელ G^* ჯგუფზე, რომ $\varphi(a,\mathrm{b})=\varphi(a)\varphi(\mathrm{b})$ ნებისმიერი a, b ელემენტებისთვის G-დან (ან $(ab)^\varphi = a^\varphi b^\varphi$, თუ a ელემენტის ანასახს φ ასახვის დროს ავღნიშნავთ a^φ სიმბოლოთი).

ჯგუფის მაგალითები. ნებისმიერი რგოლის ადიციური ჯგუფი, კერძოდ $\mathbb{Z}$-მთელი რიცხვები, $\mathbb{Q}$ რაციონალური რიცხვები, $\mathbb{R}$ ნამდვილი რიცხვები, $\mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვები შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ნებისმიერი K ველის მულტიპლიკაციურია K^* ჯგუფი, კერძოდ $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

ჯგუფი $GL_n(K)$- ყველა n-ური რიგის შებრუნებად მატრიცთა ჯგუფი, რომლის ჯგუფური ოპერაცია არის მატრიცთა გამრავლების ოპერაცია; ეს ჯგუფი კომუტაციურია, როცა n≥2.

ნებისმიერი M სიმრავლის ჩასმათა (ბიექციების) S(M) ჯგუფი. ჩვენთვის იქნება მნიშვნელოვანი n ელემენტიანი M={1,2,3,..,n} სიმრავლის ჩასმათა ჯგუფი, რომელსაც S_n-ით აღნიშნავენ.

ქვეჯგუფი ეს არის ჯგუფის ის არაცარიელი ნაწილი, რომელიც თვითონ არის ჯგუფი იმ ოპერაციის მიმართ, რომელიც განმარტებულია ჯგუფში. აღვნიშნოთ, რომ G ჯგუფის არაცარიელი ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ქვეჯგუფი, როცა ის ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნებული ოპერაციების მიმართ, ე.ი.

1. თუ x,y $\in$ H, მაშინ xy $\in$ H,
2. თუ x $\in$ H, მაშინ $x^{-1} \in$ H,

და წერენ H $\leq$ G. თუ H $\leq$ G და H $\neq$ G, მაშინ წერენ H < G.

ქვეჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს ციკლური ქვეჯგუფი, წარმოქმნილი a ელემენტით, ე.ი. a ელემენტის ყველა მთელი ხარისხების სიმრავლე $\langle a \rangle = \{a^m \,|m \in \mathbb{Z}\}$. აღვნიშნოთ, რომ თუ $|a|$=∞, მაშინ $\langle a \rangle$ იზომორფულია $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა რგოლის ადიციური ჯგუფის; თუ $|a|$=n, მაშინ $\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ შედგება ზუსტად n ელემენტისგან და იზომორფულია n მოდულით ნაშთთა $\mathbb{Z}_n$ რგოლის ადიციური ჯგუფის.

სიმრავლით წარმოქმნილი ჯგუფი. ვთქვათ M არის G ჯგუფის ქვესიმრავლე, მაშინ M სიმრავლით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი ვუწოდოთ G ჯგუფის ყველა იმ ქვეჯგუფის თანაკვეთას, რომელიც M-ს მოიცავს და აღინიშნება $\langle M \rangle$-ით. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\langle M \rangle$ ემთხვევა ყველა შესაძლო $m_1^{\varepsilon_1} m_2^{\varepsilon_2} \dots m_k^{\varepsilon_k}$სახის ნამრავლთა სიმრავლეს, სადაც $m_i \in M$, $\epsilon_i = \pm 1$.

ამბობენ, რომ G ჯგუფი **წარმოიქმნება** M **სიმრავლით**, თუ G=$\langle M \rangle$. მაგალითად, S_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა (ij) ტრანსპოზიციათა სიმრავლით. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ S_n-ის ყოველი ჩასმა წარმოიდგინება ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით. რადგან (ij)=(1i)(1j)(1i), ამიტომ S_n წარმოიქმნება (12)(13)..(1n) ტრანსპოზიციებითაც კი. ლუწ ჩასმათა ნისანცვლადი A_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა შესაძლო სამმაგი ციკლებით, რადგან ყოველი ლუწი ჩასმა არის ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვების ნამრავლი და

$$(ij)(ik)=(ijk),\ (ij)(kl)=(ilj)(jkl).$$

მოსაზღვრე კლასები. ვთქვათ G ჯგუფია, H მისი ქვეჯგუფი. განვიხილოთ G-ზე ექვივალენტობა შემდეგი წესით: $a \sim b \ \leftrightarrow a^{-1}b \in H.$ G ჯგუფი იშლება ექვივალენტობის კლასებად, რომელთაც ეწოდება მარცხენა **მოსაზღვრე კლასები** H **ჯგუფის მიმართ**. განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა იმ b ელემენტთა სიმრავლე, რომელიც მოცემული a ელემენტის ექვივალენტურია (ე.ი. a-ს შემცველი კლასია), ემთხვევა $aH = \{ah | h \in H\}$ სიმრავლეს. ამგვარად, ეს სიმრავლე მიიღება H-ის მარცხნიდან a-ზე

გამრავლებით. რადგან ოპერაცია ჯგუფში არ არის სავალდებულო იყოს კომუტაციური, ჩვენ, საზოგადოდ, მივიღებთ სხვა ექვივალენტობის მიმართებას, თუ ჩავთვლით, რომ $a \sim b \leftrightarrow ba^{-1} \in H.$ ამ შემთხვევაში მივიღებთ G-ს დაშლას მარჯვენა Ha მოსაზღვრე კლასებად. G ჯგუფის თავის თავზე $x \to x^{-1}$ ასახვას ყოველი aH მარცხენა მოსაზღვრე კლასი გადაჰყავს $(aH)^{-1} = H^{-1}a^{-1}$ მარჯვენა მოსაზღვრე კლასში a^{-1} წარმომდგენლით და ამგვარად გვაძლევს მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლის ბიექციას მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეზე. მარცხენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს, რომელიც ზემოთ დამტკიცებულის გამო ემთხვევა მარჯვენა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს, ეწოდება H ქვეჯგუფის **ინდექსი** G ჯგუფში და აღინიშნება |G : H|-ით.

1.1. ლაგრანჟეს თეორემა. ვთქვათ G სასრული ჯგუფია, H მისი ქვეჯგუფი. მაშინ

$$|G|=|G : H| \cdot |H|.$$

□ ეს თეორემა, ცხადია გამომდინარეობს იქედან, რომ ჯგუფი G არის H ქვეჯგუფის მიმართ არათანამკვეთ მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება, ხოლო ყოველ კლასში იმდენი ელემენტია, რამდენიც არის H-ში. □

ლაგრანჟის თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან შედეგს.

შედეგი 1. სასრულ ჯგუფში ყოველი ქვეჯგუფის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის რიგის გამყოფს.

შედეგი 2. სასრული ჯგუფის ყოველი a ელემენტის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის გამყოფს, რადგან ის ემთხვევა a-ს მიერ წარმოქმნილი ‹a› ქვეჯგუფის რიგს.

ჯგუფების ჰომომორფიზმი. G ჯგუფს G^* ჯგუფში φ ასახვას ეწოდება **ჰომომორფული ასახვა** (ან უბრალოდ **ჰომომორფიზმი**), თუ G ჯგუფის ნებისმიერი a, b ელემენტებისთვის

$$(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$$

G ჯგუფის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს , რომლებიც აისახებიან φ-ს დროს G^* ჯგუფის ერთეულოვან ელემენტზე, ვუწოდოთ φ ჰომომორფიზმის ბირთვი და აღვნიშნოთ $Ker\ \varphi$-ით. განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $Ker\ \varphi$ G-ს ქვეჯგუფია.

ჰომომორფიზმის მაგალითია $GL_n(K) \to K^*$ ასახვა წესით $A \to detA,$ სადაც K ველია, ამ მაგალითში ბირთვი წარმოადგენს ყველა იმ მატრიცის $SL_n(K)$ სიმრავლეს, რომელთა დეტერმინანტი ტოლია 1-ის.

ჯგუფის მოქმედება სიმრავლეზე. ვთქვათ G ჯგუფია, M- რაიმე სიმრავლე. ამბობენ, რომ ჯგუფი G მოქმედებს M სიმრავლეზე, თუ მოცემულია ჰომომორფიზმი $\varphi: G \to S(M)$.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, G ჯგუფის M სიმრავლეზე მოქმედების მოცემა ნიშნავს, რომ G-ს ყოველ a ელემენტს ეთანადება გარდაქმნა $a\varphi \epsilon S(M)$ ისე ,რომ

$$(a \cdot b)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$$

ჰომომორფიზმების ზოგადი თვისების თანახმად G ჯგუფის ერთეულს e-ს შეესაბამება იგივური გარდაქმნა $\mathrm{e}\varphi = \mathrm{id}\ M$, ხოლო შებრუნებულ ელემენტს - შებრუნებული გარდაქმნა.

$a\varphi$ გარდაქმნის გამოყენების შედეგი $m(a\varphi)$ 'წერტილზე' $m \in M$ სიმოკლისათვის აღინიშნება ma $-$ით. თვისება (*) გადაიწერება 'ასოციაციურობის' სახით:

$$m(ab) = (ma)b$$

ნებისმიერი $m \in M, a, b \in G$ და $me = m$ ყველა $m \in M.$

ამბობენ, რომ ჯგუფი G მოქმედებს M-ზე ზუსტად, თუ φ არის ჩადგმა.

მაგალითი. ვთქვათ G ჯგუფია. მაშინ ოველი $a \in G$ ელემენტს შევუსაბამოთ $\hat{a}$ ჩასმა G-ზე, რომელსაც გადაყავს $g \in G$ ელიემენტი ga-ში (G-ს მარჯვენა a-თი). ჩვენ ვღებულობთ ჯგუფ G-ს მოქმედებას თავის თავზე . ეს მოქმედება ზუსტია, რადგან $ga = gb \leftrightarrow a = b.$

1.2 წინადადება. ნებისმიერი სასრული G ჯგუფი შეიძლება ჩავდგათ S_n ჯგუფში, სადაც

$n = |G|.$

ვთქვათ G ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე და $m \in M. m$ ელემენტით წარმოქმნილი **ორბიტა** ვუწოდოთ სიმრავლეს

$$mG = \{mg | g \in G\}.$$

შევნიშნოთ, რომ ორბიტა წარმოიქმნება ნებისმიერი თავისი ელემენტით. მართლაც, (mg)G=m(gG)=mG

1.3 წინადადება. M სიმრავლე იშლება თავის არათანამკვეთ ორბიტათა გაერთიანებად.

□ ვთქვათ ორი m_1G და m_2G ორბიტები იკვეთება და m მათი საერთო ელემენტია. რადგან ორბიტა წარმოიქმნება ნებისმიერი თავისი ელემენტით ამიტომ $mG = m_1G$ და $mG = m_2G$, საიდანაც $m_1G = m_2G$. □

ამბობენ, რომ G ჯგუფი მოქმედებს M-ზე ტრანზიტულად, თუ ორბიტა მხოლოდ ერთია, ე.ი. ნებისმიერი $m_1, m_2 \in M$-სთვის არსებობს $g \in G$ ისეთი, რომ $m_1g = m_2$. მაგალითისათვის, როცა $n \geq 3$, ლუწ ჩასმათა A_n ჯგუფი ტრანზიტულად მოქმედებს {1, 2, .., n} სიმრავლეზე, რადგან სიმბოლოთა ნებისმიერი i, j წყვილისათვის მოიძებნება ისეთი ლუწი ჩასმა, კონკრეტულად (i j k) სამმაგი ციკლი, რომელსაც i გადაჰყავს j-ში.

თუ G ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე, მაშინ $m \in M$ ელემენტის სტაბილიზატორი ვუწოდოთ სიმრავლეს $St_G(m) = \{h \in G | mh = m\}$. ცხადია, რომ სტაბილიზატორი არის G-ს ქვეჯგუფი.

1.4. წინადადება. mG ორბიტის სიმზლავრე თანხვდება $St_G(m)$ სტაბილიზატორის ინდექსს G ჯგუფში.

□ განვიხილოთ G ჯგუფის σ ასახვა mG სიმრავლეზე შემდეგი წესით: $g\sigma = mg$. ვთქვათ, $H = St_G(m)$. აღვნიშნოთ, რომ $a\sigma = b\sigma \leftrightarrow ma = mb \leftrightarrow m = m(ba^{-1}) \leftrightarrow ba^{-1} \in H \leftrightarrow b \in Ha$. ეს იმას ნიშნავს, რომ σ ასახვის დროს ერთ ელემენტზე აისახება ზუსტად მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი H-ის მიმართ. ამგვარად, მარჯვენა მოსაზღვრე კლასთა სიმრავლის სიმძლავრე თანხვდება mG ორბიტის სიმძლავრეს. □

შედეგი: თუ G სასრული ჯგუფი მოქმედებს M სიმრავლეზე, მაშინ ნებისმიერი ორბიტის ელემენტთა რიცხვი ყოფს ჯგუფის რიგს.

განვიხილოთ G ჯგუფის თავის თავზე შეუღლებით მოქმედების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი. $a \in$ G ელემენტს შევუსაბამოთ ასახვა $\hat{a}$: G $\rightarrow$ G წესით: $x \longmapsto a^{-1}xa$. მოხერხებულობისთვის მომავალში ელემენტი $a^{-1}xa$ აღვლიშნოთ x^a სიმბოლოთი. ამ აღნიშვნას აზრი აქვს, რადგან სრულდება შემდეგი ფორმულები: $(x^a)^b$=x^{ab}, $(xy)^a$= x^ay^a. ამ მოქმედებისას ორბიტა x წარმომადგენლით შეადგენს x^G= $\{x^g |$ g $\in$ G$\}$ სიმრავლეს და მას ეწოდება **შეუღლებულ ელემენტთა კლასი**.

1.5. წინადადება. G ჯგუფი იშლება შეუღლებულ ელემენტთა არათანამკვეთ კლასებად და თუ ჯგუფი სასრულია, მაშინ თითოეულ კლასში ელემენტთა რიცხვი ყოფს G ჯგუფის რიგს.

მაგალითის სახით აღვწეროთ ჩასმათა S_n ჯგუფის შეუღლებულ ელემენტთა კლასები. ვთქვათ, $a \in S_n$. განვიხილოთ a-სთან შეუღლებული a^x ჩასმა. განვიხილოთ a ჩასმის დაშლა დამოუკიდებელ ციკლებად: a=$(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k)(\beta_1\beta_2 \dots \beta_l)$…. ჩასმა x წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი სახით

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k & \beta_1\beta_2 \dots \beta_l & \dots \\ \alpha_1'\alpha_2' \dots \alpha_k' & \beta_1'\beta_2' \dots \beta_l' & \dots \end{pmatrix}.$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ $a^x = x^{-1}\, ax = (\alpha_1'\alpha_2' \dots \alpha_k')(\beta_1'\beta_2' \dots \beta_l') \dots$. სხვა სიტყვებით, a^x მიიღება a-სგან მის ციკლებში იმ სიმბოლოების შეცვლით, რომლებშიც ისინი გადაჰყავს x ჩასმას. ასე რომ a და a^x ჩასმებს გააჩნიათ ერთნაირი ციკლური აგებულება, ე.ი. მათ დამოუკიდებელ ციკლებად დაშლაში არის ტოლი სიგრძის ციკლების ტოლი რაოდენობა. პირიქით, თუ a=$(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k)$ $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_l)$ …, b = $(\alpha_1'\alpha_2' \dots \alpha_k')$ $(\beta_1'\beta_2' \dots \beta_l')$ … - ერთნაირი ციკლური წყობის ორი ჩასმაა, მაშინ b მიიღება a-სგან $x = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k & \beta_1\beta_2 \dots \beta_l & \dots \\ \alpha_1'\alpha_2' \dots \alpha_k' & \beta_1'\beta_2' \dots \beta_l' & \dots \end{pmatrix}$ ჩასმით შეუღლების შედეგად.

ამგვარად, S_n-ში შეუღლებულ ელემენტთა კლასი არის ერთნაირი ციკლური აგებულების ჩასმათა სიმრავლე.

≥**ნორმალური ქვეჯგუფები.** ვამბობთ, რომ H ქვეჯგუფი არის G ჯგუფის **ნორმალური ქვეჯგუფი** ან G ჯგუფის **ნორმალური გამყოფი** და ვწერთ H ⊴ G, თუ სრულდება შემდეგი ორი ექვივალენტური პირობა:

1) H ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარჯვენა და მარცხენა მოსაზღვრე კლასები ემთხვევა, ე.ი.

$$xH = Hx \text{ ყველა } x \in \mathrm{G}\text{-სთვის}$$

2) H ქვეჯგუფი ჩაკეტილია შეუღლების მიმართ, ე.ი.

$$h \in \mathrm{H},\ x \in \mathrm{G} \Rightarrow h^x \in \mathrm{H}.$$

თუ H ⊴ G - საკუთრივი ქვეჯგუფია, მაშინ ვწერთ H ◅ G.

G ჯგუფს ეწოდება **მარტივი**, თუ მასში არ არის არაერთეულოვანი საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფები.

□ დავამტკიცოთ მოყვანილი პირობების ექვივალენტურობა. 1) ⇒ 2), რადგან $xH = Hx$ ტოლობა ტოლფასია $x^{-1}\,Hx = H$ ტოლობის.

ვთქვათ, ადგილი აქვს 2) პირობას. ეს ნიშნავს, რომ სრულდება ჩართვა $x^{-1}\,Hx \subseteq H$, $\forall x \in \mathrm{G}$, მაგრამ მაშინ სრულდება აგრეთვე ჩართვა $(x^{-1})^{-1}\,Hx^{-1} \subseteq H$, ე.ი. $xHx^{-1} \subseteq H$. მარცხნიდან x^{-1}-ზე და მარჯვნიდან x-ზე გამრავლების შედეგად ვღებულობთ $H \subseteq x^{-1}\,Hx$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $H = x^{-1}\,Hx$, ე.ი. სრულდება 1) პირობა. □

ნორმალური ქვეჯგუფის მაგალითია $\varphi : \mathrm{G} \to G^*$ ჰომომორფიზმის ბირთვი, რადგან, თუ $H = Ker\varphi$ და $h \in H$, მაშინ $(x^{-1}hx)\varphi = (x\varphi)^{-1}(h\varphi)(x\varphi) = (x\varphi)^{-1} * 1 * (x\varphi) = 1$, საიდანაც $h^x \in H$.

ვთქვათ X, Y – G ჯგუფის ქვესიმრავლეებია. განვიხილოთ მათი ნამრავლი

$$\mathrm{XY} = \{\mathrm{xy} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}\}.$$

თუ A და B ქვეჯგუფებია, მაშინ $A^2 = A$, ხოლო AB სიმრავლე ყოველთვის ქვეჯგუფი არ არის. მაგალითისათვის განვიხილოთ ქვეჯგუფები S_3-ში: $A = \{e, (12)\}, B = \{e, (13)\}$.

ამბობენ, რომ ქვეჯგუფი A ახდენს B-ს **ნორმალიზებას**, თუ $B^a = B$ (ან, რაც იგივეა, $B^a \subseteq B$) ყველა $a \in A$-სთვის.

1.6. ლემა. ვთქვათ A, B G ჯგუფის ქვეჯგუფებია და A ახდენს B-ს ნორმალიზებას (ან B ახდენს A -ს ნორმალიზებას). მაშინ სიმრავლე AB - ქვეჯგუფია.

□ საჭიროა შევამოწმოთ, რომ AB სიმრავლე ჩაკეტილია გამრავლებისა და შებრუნებული ელემენტის აღების მიმართ. ვთქვათ $a, a_1 \in \mathrm{A}$, $\mathrm{b}, \mathrm{b}_1 \in \mathrm{B}$, გვაქვს $(ab)(a_1\mathrm{b}_1) = aa_1(a_1^{-1}ba_1)\mathrm{b}_1 \in AB$, რადგან $a_1^{-1}ba_1 \in B$. ანალოგიურად, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}(ab^{-1}a^{-1}) \in AB$, რადგან $ab^{-1}a^{-1} \in B$. □

ფაქტორ - ჯგუფები. ვთქვათ G ჯგუფია, H - მისი ქვეჯგუფი. ჩვენ ვიცით, რომ G ჯგუფი იშლება მარცხენა მოსაზღვრე კლასებად H ქვეჯგუფის მიმართ. მაშინ შეიძლება განვიხილოთ ფაქტორ-სიმრავლე, რომლის ელემენტებია ას კლასები. გვინდა ამ ფაქტორ-სიმრავლეზე ჯგუფის სტრუქტურის შემოტანა. თურმე ამის გაკეთება ბუნებრივი გზით შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა H ქვეჯგუფი ნორმალურია G-ში. შემოვიტანოთ შესაბამისი განმარტება.

ვთქვათ $\mathrm{H} \trianglelefteq \mathrm{G}$. G / H-ით აღვნიშნოთ H-ის მიმართ მარცხენა (მარჯვენა) მოსაზღვრე კლასების სიმრავლე. განვიხილოთ ორი $a\mathrm{H}$ და $b\mathrm{H}$ მოსაზღვრე კლასების ნამრავლი $(a\mathrm{H}) * (b\mathrm{H})$, როგორც ქვესიმრავლეთა ნამრავლი ჯგუფში. გვაქვს, $(a\mathrm{H}) * (b\mathrm{H}) = a(\mathrm{H}b)\mathrm{H} = a(b\mathrm{H})\mathrm{H} = \mathrm{ab} * \mathrm{H} * \mathrm{H} = \mathrm{abH}$. ჩვენ მივიღეთ კვლავ მოსაზღვრე კლასი. მაშასადამე, a და b წარმომადგენლებიანი ორი $a\mathrm{H}$ და $b\mathrm{H}$ მოსაზღვრე კლასების ნამრავლი წარმოადგენს $ab\mathrm{H}$ მოსაზღვრე კლასს ab წარმომადგენლით. ამგვარად, ჩვენ განვსაზღვრეთ გამრავლების ოპერაცია G / H სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ, რომ ამასთან სრულდება ჯგუფის განმარტებაში შემავალი ყველა მოთხოვნა. მართლაც, მოსაზღვრე კლასთა გამრავლების ასოციაციურობა გამომდინარეობს ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების ასოციაციურობიდან. ერთეულის როლს ასრულებს თვითონ H ნორმალური გამყოფი, რომელიც წარმოადგენს G-ს დაშლის ერთ-ერთ მოსაზღვრე კლასს H-ის მიმართ: სახელდობრ, ნებისმიერი a-სთვის G-დან გვექნება $aH * H = aH, H * aH = aHH = aH$. ბოლოს მოსაზღვრე aH კლასისათვის შებრუნებული იქნება მოსაზღვრე $a^{-1}H$ კლასი, ვინაიდან $aH * a^{-1}H = 1 * H = H$. ჩვენ მიერ აგებულ G / H ჯგუფს ეწოდება G ჯგუფის **ფაქტორ-ჯგუფი** H ნორმალური გამყოფის მიმართ.

ვთქვათ, ახლა H არის G ჯგუფის ნებისმიერი ნორმალური გამყოფი. თუ G ჯგუფის ყოველ a ელემენტს თანადობაში მოვუყვანთ H ნორმალური გამყოფის მიმართ იმ მოსაზღვრე aH კლასს, რომელშიც მოთავსებულია ეს ელემენტი, მივიღებთ G ჯგუფის ε ასახვას მთელს G / H ფაქტორ-ჯგუფზე. G / H ჯგუფში გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ასახვა იქნება ჰომომორფული. მიღებულ ε ჰომომორფიზმს ეწოდება **ბუნებრივი** ჰომომორფიზმი G / H ფაქტორ-ჯგუფზე. ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი არის თვითონ H ნორმალური გამყოფი:

$$Ker\varepsilon = \{ a \in \mathrm{G} | a\varepsilon = \mathrm{H}\} = \{ a \in \mathrm{G} | a\mathrm{H} = \mathrm{H}\} = \{ a \in \mathrm{G} | a \in \mathrm{H}\} = \mathrm{H}.$$

ბოლოს მოვიყვანოთ საყოველთაოდ მიღებული ტერმინოლოგია. $\varphi\colon \mathrm{G} \to G'$ ჰომომორფიზმს ეწოდება ეპიმორფიზმი, თუ მისი ანასახი G'-ის ტოლია.

ჰომომორფიზმს ეწოდება მონომორფიზმი (ან **ჩადგმა**), თუ მისი ბირთვი ერთეულოვანია. G ჯგუფი იდგმება G' ჯგუფში, თუ არსებობს G-ს ჩადგმა G'-ში. ცხადია, რომ იზომორფიზმი არის ერთდროულად ეპიმორფიზმი და მონომორფიზმი.

1.7. თეორემა ჰომომორფიზმის შესახებ.

1) ვთქვათ $\mathrm{H} \trianglelefteq \mathrm{G}$, $\varepsilon \rightarrow \mathrm{G} / \mathrm{H}$ - ბუნებრივი ეპიმორფიზმია, A - ქვეჯგუფია G-დან, მაშინ $A\varepsilon = A\,\mathrm{H} / \mathrm{H}$.

2) ვთქვათ $\varphi : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G}'$ - ჯგუფთა ეპიმორფიზმია , $\mathrm{H} = Ker\ \varphi$, $\varepsilon : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G} / \mathrm{H}$ - ბუნებრივი ეპიმორფიზმი. მაშინ არსებობს ეპიმორფიზმი τ ისეთი, რომ $\varphi = \varepsilon\tau$, ე.ი. კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathrm{G}' \\
& \mathrm{G} / \mathrm{H} \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

□ 1) განმარტების თანახმად $A\varepsilon = \{\, a\mathrm{H}\ a \in A\}$. $A\mathrm{H}$ (რადგან A ახდენს H-ის ნორმალიზებას) არის ქვეჯგუფი, რომელიც შეიცავს H ნორმალურ ქვეჯგუფს და ფაქტორ-ჯგუფი $A\ \mathrm{H}\ /\ \mathrm{H}$ შედგება ზუსტად $(ah)H = a(hH) = aH$ სახის კლასებისაგან.

2) განვმარტოთ $\tau\ :\ G\ /\ \mathrm{H} \rightarrow G'$ იზომორფიზმი წესით: $(aH)\tau = a\varphi$. შევნიშნოთ, რომ განმარტება კორექტულია, ე.ი. ის არ არის დამოკიდებული მოცემული კლასის a წარმომადგენელზე. მართლაც, თუ ავიღებთ სხვა ah წარმომადგენელს, გვექნება $(ah)\varphi = a\varphi * h\varphi = a\varphi$. გასაგებია, რომ τ არის „ზე“ ასახვა, ის არის ჰომომორფიზმი, რადგან $((aH)\ *\ (bH))^{\tau} = (abH)\tau = (ab)\varphi = a\varphi * b\varphi = (aH)\tau * (bH)\tau$. ვთქვათ, ორი aH და bH კლასების ანასახები ემთხვევა: $(aH)\tau = (bH)\tau$. ეს ნიშნავს, რომ $a\varphi = b\varphi$. მაშინ $(a^{-1}b)\varphi = 1$, ე.ი. $a^{-1}b \in H$. ბოლო ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ $aH = bH$. ამგვარად, τ - იზომორფიზმია. $\varphi = \varepsilon\tau$ ტოლობას ვამოწმებთ უშუალოდ: $a(\varepsilon\tau) = (a\varepsilon)\ \tau = (aH)\tau = \mathrm{a}\varphi$. □

შედეგი 1. ვთქვათ $\varphi : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G}'$ ეპიმორფიზმია, $\mathrm{G}' \geq A' \trianglerighteq B'$, A და B შესაბამისად A'-ს და B'-ს სრული წინა სახეებია . მაშინ $A \trianglerighteq B$ და $A/B \cong A'/B'$.

□ ვთქვათ, φ-ს A-ზე შეზღუდვა არის φA, $\tau\colon A' \rightarrow A'/B'$ ბუნებრივი ეპიმორფიზმია. განვიხილოთ ეპიმორფიზმი $\varphi A^{\tau}\colon A \rightarrow A'/B'$. განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი ბირთვი B-ს ტოლია. მაშინ თეორემის თანახმად

$$A/B \cong A'/B'. \ \square$$

შედეგი 2. ვთქვათ $A \leq G, H \trianglelefteq G$. მაშინ

$$A/A \cap H \cong AH/H.$$

□ დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ბუნებრივი $\varepsilon : G \to G/H$ ეპიმორფიზმი და მისი A -ზე შეზღუდვა. რადგან $Ker\varepsilon = H$, ამიტომ $Ker\varepsilon_A = A \cap H$. თეორემის თანახმად A-ს ანასახი AH/H -ის ტოლია. ასე რომ ε_A იძლევა $A \to AH/H$ ეპიმორფიზმს $A \cap H$ ბირთვით. თეორემის 2) პუნქტის თანახმად ვღებულობთ: $A/A \cap H \cong AH/H$. □

§2. კელის თეორემა

შემდგომ $S(M)$ აღნიშნავს M სიმრავლის ყველა ბიექციის (ჩასმათა) ჯგუფს. თუ M სიმრავლის სიმძლავრე სასრულია და m-ის ტოლია, მაშინ $S(M)$ ჯგუფი შეიძლება გავაიგივოთ S_m ჯგუფთან.

2.1. თეორემა (კელი). ვთქვათ G ჯგუფია, H - მისი ქვეჯგუფი და $M - G$ ჯგუფის ყველა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლე H-ის მიმართ. განვიხილოთ ისეთი $\varphi : G \to S(M)$ ასახვა, რომ $g\varphi$ ჩასმას $g \in G$, ნებისმიერი xH მოსაზღვრე კლასი გადაჰყავს gxH მოსაზღვრე კლასში.

მაშინ φ ჰომომორფიზმია (არა აუცილებლად „ზე“) ბირთვით

$$Ker\varphi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$$

□ ცხადია, რომ $(g_1g_2)\varphi = (g_1\varphi) \cdot (g_2\varphi)$, რადგან $(g_1g_2)(xH)= g_1(g_2xH)$ ნებისმიერი $x \in G$ -სთვის. შემდეგ,

$$g \in Ker\varphi \Leftrightarrow (xH = gxH \text{ ყველა } xH\text{-სთვის}) \Leftrightarrow (g \in xHx^{-1} \text{ ყველა } x\text{-სთვის}). \ \square$$

$H = \{1\}$-ის შემთხვევაში φ ჰომომორფიზმს კელის თეორემიდან ეწოდება G ჯგუფის (**მარცხენა**) **რეგულალური წარმოდგენა**.

2.2. შედეგი. 1) G ჯგუფის რეგულარული წარმოდგენა არის G ჯგუფის ჩადგმა $S(G)$ ჯგუფში. G-დან ნებისმიერი არაერთეულოვანი ელემენტის ანასახი ამ ჩადგმის მიმართ წარმოადგენს ჩასმას, რომელიც ახდენს ყველა სიმბოლოს ძვრას.

ნებისმიერი G სასრული ჯგუფი იდგმება S_m ჯგუფში, სადაც $m = |G|$.

2) ნებისმიერი G სასრული ჯგუფი იდგმება $GL_m(F)$ ჯგუფში, სადაც F ველია, $m = |G|$.

□ პირველი დებულება გამომდინარეობს კელის თეორემიდან, ხოლო მეორე პირველისაგან S_m-ის $GL_m(F)$-ში ჩადგმის გათვალისწინებით, რომელიც მოცემულია წესით $\sigma \to A_\sigma$, სადაც $(A_\sigma)_{ij} = 1$, როცა $\sigma(j) = i$ და, $(A_\sigma)_{ij} = 0$, როცა $\sigma(j) \neq i$. □

2.3. ამოცანა. ნებისმიერი 4 რიგის ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}_4$ ჯგუფის ან $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ჯგუფის.

ამოხსნა. ვთქვათ G - 4 რიგის ჯგუფია. G გავაიგივოთ მის ანასახთან S_4-ში რეგულარული წარმოდგენის მიმართ, მაშინ G ჯგუფის ნებისმიერი არაერთეულოვანი ელემენტი არის ან 4 სიგრძის ციკლი, ან ორი დამოუკიდებელი ტრანსპოზიციის ნამრავლი (სხვანაირად გაჩნდება უძრავი სიმბოლო). თუ G-ში არის 4 სიგრძის ციკლი, მაშინ $G \cong \mathbb{Z}_4$, თუ კი არა, მაშინ $G \cong K$.

2.3. შედეგი. G ჯგუფის ყოველი სასრული m ინდექსის მქონე H ქვეჯგუფი მოიცავს G-ს N ნორმალურ ქვეჯგუფს, რომლის ინდექსი იყოფა m-ზე და რომელიც ყოფს $m!$-ს.

□ N-ად შეიძლება ავიღოთ $Ker\varphi$ ქვეჯგუფი, სადაც φ ჰომომორფიზმია კელის თეორემიდან. G-ში მისი ინდექსი $Im\varphi$ ქვეჯგუფის რიგის ტოლია S_m ჯგუფში და მაშასადამე, ყოფს $m!$-ს. m-ზე გაყოფადობა გამოიყვანება $Ker\varphi \leq H \leq G$ ჩართვებიდან და $|G : Ker\varphi| = |G : H| \cdot |H : Ker\varphi|$ ინდექსთა ტოლობიდან. □

§3. ორმაგი მოსაზღვრე კლასები

ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფებია. ნებისმიერ $KgH = \{kgh | k \in K, h \in H\}$ სიმრავლეს, სადაც $g \in G$, ეწოდება G ჯგუფის ორმაგი მოსაზღვრე კლასი K და H ქვეჯგუფების მიმართ. ყველა ასეთ კლასთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $K \setminus G/H$ სიმბოლოთი.

3.1. წინადადება. ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ქვეჯგუფებია. მაშინ

1) ნებისმიერი g-სთვის, $g \in G$, არსებობს ერთადერთი g-ს შემცველი ორმაგი მოსაზღვრე კლასი K და H ქვეჯგუფების მიმართ.

2) G იშლება არათანამკვეთ ორმაგ მოსაზღვრე კლასებად K და H-ის მიმართ.

3) ნებისმიერი $Kg\,H$ ორმაგი მოსაზღვრე კლასი არის G-ს და H-ის მიმართ $|\,K: K \cap gHg^{-1}\,|$ სხვადასხვა მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება.

□ 1) აშკარაა, რომ $g = ege \in Kg\,H.$ თუ g ეკუთვნის კიდევ ერთ $Kx\,H$ ორმაგ მოსაზღვრე კლასს, მაშინ $g = kxh$ რომელიღაც $k \in \mathrm{K}$, $h \in \mathrm{H}$ და ამიტომ $Kg\,H = K(kxh)H = KxH.$

პუნქტი 2) უშუალოდ გამომდინარეობს პუნქტი 1)-დან.

3) $Kg\,H$ ორმაგი მოსაზღვრე კლასი არის $kg\,H$ მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება, როცა k გაირბენს K-ს. ვთქვათ A არის ყველა ასეთი მარცხენა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლე, ხოლო B - ყველა K-ს $K \cap gHg^{-1}$ მიმართ ყველა მარცხენა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლე.

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\varphi : A \to B$ ასახვა, განსაზღვრული $kg\,H \mapsto k(K \cap gHg^{-1})$, სადაც $k \in \mathrm{K}$, არის ბიექცია. ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება კორექტულია და φ ასახვა ურთიერთცალსახაა. ვთქვათ $k_1, k_2 \in \mathrm{K}$. მაშინ

$$k_1 gH = k_2 gH \Leftrightarrow g^{-1}k_1^{-1}k_2 g \in H \Leftrightarrow k_1^{-1}k_2 \in K \cap gHg^{-1} \Leftrightarrow k_1(K \cap gHg^{-1}) = k_2(K \cap gHg^{-1}).$$

აშკარაა ის, რომ φ – „ზე“ ასახვაა. □

3. 2. თეორემა. ვთქვათ K და H – G ჯგუფის ქვეჯგუფებია. ვთქვათ X და G-ს K და H-ის მიმართ ორმაგი მოსაზღვრე კლასების წარმომადგენელთა სრული სისტემა (თითო-თითო ყოველი კლასიდან). მაშინ

$$|\mathrm{G} : \mathrm{H}| = \sum_{x \in \mathrm{X}} \left| K : K \bigcap xHx^{-1} \right| \tag{1}$$

□ G ჯგუფი იშლება KxH ორმაგ მოსაზღვრე კლასებად $x \in \mathrm{X}$ წარმომადგენლებით. ყოველი მათგანი იშლება $|K: K \cap xHx^{-1}|$ რაოდენობა G H-ის მიმართ მარცხენა მოსაზღვრე კლასებად. □

§4. ნორმალიზატორი და ცენტრალიზატორი. სასრული p-ჯგუფის ცენტრი არაერთეულოვანია

G ჯგუფის H ქვეჯგუფის **ნორმალიზატორი** ეწოდება ქვეჯგუფს

$$N_G(H) = \{\, g \in \mathrm{G} | gHg^{-1} = H\}.$$

$a \in G$ ელემენტის **ცენტრალიზატორი** ეწოდება ქვეჯგუფს

$$C_G(a) = \{\, g \in \mathrm{G} | gag^{-1} = 1\}.$$

აშკარაა, რომ $H \trianglelefteq N_G(H)$ და $<a> \leq Z(C_G(a))$.

4.1. თეორემა. 1) G ჯგუფის ქვეჯგუფთა სიმრავლის სიმძლავრე, რომლებიც შეუღლებულია მოცემულ H ქვეჯგუფთან, $|\mathrm{G} : N_G(H)|$-ის ტოლია.

2) G ჯგუფის ელემენტთა სიმრავლის სიმძლავრე, რომლებიც შეუღლებულია მოცემულ a ელემენტთან, $|\mathrm{G} : C_G(a)|$-ის ტოლია.

□ 1) G ჯგუფი მოქმედებს $M = \{xHx^{-1} | x \in G\}$ სიმრავლეზე შეუღლებით: xHx^{-1} ქვეჯგუფი $g \in G$ ელემენტის მოქმედების შედეგად გადადის $gxHx^{-1}g^{-1}$ ქვეჯგუფში. ადვილად გასაგებია, რომ ეს მოქმედება ტრანზიტულია და $St_G(H) = N_G(H)$. მაშინ წინადადება 1.4-ის თანახმად $|M| = |\, G : N_G(H)|$.

2) G ჯგუფი მოქმედებს თავის თავზე შეუღლებით: x ელემენტი $g \in G$ ელემენტის მოქმედების შედეგად გადადის gxg^{-1} ელემენტში. ცხადია, რომ ამ მოქმედების ორბიტები - ეს შეუღლებულ ელემენტთა კლასებია. a ელემენტის ორბიტის სიმძლავრე $|\, G : St_G(a)| = |\, G : C_G(a)|$-ს ტოლია. □

4.2. თეორემა. სასრული p-ჯგუფის ცენტრი არაერთეულოვანია.

□ ვთქვათ G სასრული p-ჯგუფია. G ჯგუფი იშლება არათანამკვეთ შეუღლებულ ელემენტთა კლასებად, რომელთაგანაც ერთ-ერთი {1}-ის ტოლია. რადგან ამ კლასთა სიმძლავრეები p რიცხვის ხარისხებია (თეორემა 1-ის თანახმად) და ამ სიმძლავრეების ჯამი p-ს ხარისხია, ამიტომ გვაქვს კიდევ რამდენიმე ერთელემენტიანი კლასი. ყველა ერთელემენტიანი კლასის გაერთიანება ემთხვევა Z(G)-ს. □

§5. სილოვის თეორემა

ვთქვათ $|G| = p^k m$, სადაც p მარტივი რიცხვია, $k \geq 1$ და უ. ს. გ. $(p, m) = 1$. G ჯგუფის H ქვეჯგუფს **სილოვის** p-ქვეჯგუფი ეწოდება, თუ $|H| = p^k$.

5.1. წინადადება. ვთქვათ q არის მარტივი p რიცხვის ხარისხი. მაშინ $UT_n(q)$ არის $GL_n(q)$ ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფი.

□ $GL_n(q)$-დან მატრიცის პირველი სტრიქონი შეიძლება იყოს n სიგრძის ნებისმიერი არანულოვანი სტრიქონი. ასეთი $(q^n - 1)$ ცალი სტრიქონია. თუ ჩვენ უკვე ავარჩიეთ პირველი i წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონი, მაშინ $(i+1)$ -ე არ უნდა ხვდებოდეს მათ წრფივ გარსში და მაშასადამე, მისი არჩევის $q^n - q^i$ ვარიანტი გვაქვს. ამიტომ

$$|GL_n(q)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} m, \tag{2}$$

სადაც უ. ს. გ. $(p, m) = 1$. დარჩა შევნიშნოთ, რომ $UT_n(q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5.2. ლემა. ვთქვათ H არის სასრული G_1 ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფი, $k - G_1$-ის ქვეჯგუფი, რომლის რიგი იყოფა p-ზე. მაშინ არსებობს ისეთი ელემენტი $x \in G_1$, რომ $K \cap xHx^{-1}$ არის K ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფი.

□ რადგან $|\, G_1 : H|$ არ იყოფა p-ზე, ამიტომ (1) ფორმულის მარჯვენა ნაწილის ერთ-ერთი $|K : K \cap xHx^{-1}|$ შესაკრები არ იყოფა p-ზე. ამის გარდა $K \cap xHx^{-1} -$ p-ჯგუფია როგორც xHx^{-1} p-ჯგუფის ქვეჯგუფი, ამიტომ $K \cap xHx^{-1}$ არის K ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფი. □

5.3. თეორემა (სილოვი). ვთქვათ G ჯგუფის რიგია $p^k m$, სადაც p მარტივი რიცხვია, $k \geq 1$ და უ. ს. გ. $(p, m) = 1$. მაშინ

1) G ჯგუფში არსებობს სილოვის p-ქვეჯგუფი,

2) G ჯგუფის ნებისმიერი p-ქვეჯგუფი იმყოფება რომელიღაც სილოვის p-ქვეჯგუფში,

3) ნებისმიერი ორი სილოვის p-ქვეჯგუფი შეუღლებულია,

4) სილოვის p-ქვეჯგუფთა რიცხვი ყოფს m-ს და სადარია 1-ის მოდულით p.

□ შედეგი 2.2.-ის თანახმად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ G არის $GL_n(p)$ ჯგუფის ქვეჯგუფი, როცა $n = |G|$. პირველი დებულება გამომდინარეობს ლემა 5.2-დან, როცა $G_1 = GL_n(p)$, $H = UT_n(p), K = G$, მეორე (მესამე), როცა $G_1 = G$ და K არის G_1-ის (სილოვის) p-ქვეჯგუფი.

დავამტკიცოთ მეოთხე დებულება. ვთქვათ H არის G ჯგუფის რომელიღაც სილოვის p-ქვეჯგუფი. 3)-ის ძალით G ჯგუფის სილოვის p-ქვეჯგუფთა რიცხვი $M = \{\, gHg^{-1} |\, g \in G\}$ სიმრავლის სიმძლავრის ტოლია. თეორემა 4.1-ის თანახმად ეს სიმძლავრე $|\mathrm{G} : N_G(H)|$-ის

ტოლია და მაშასადამე, ყოფს m-ს. განვიხილოთ H-ის შეუღლებული მოქმედება M-ზე: gHg^{-1} ჯგუფი $h \in H$ ელემენტის მოქმედებით გადადის $hgHg^{-1}h^{-1}$ ჯგუფში. წინადადება 1.4-ის თანახმად ყველა ორბიტის სიგრძე არის p-ს ხარისხი. დავამტკიცოთ, რომ მხოლოდ ერთ $\{H\}$ ორბიტას აქვს 1-ის ტოლი სიგრძე. მართლაც $\{gHg^{-1}\}$ რომ იყოს სხვა 1 სიგრძის ორბიტა, მაშინ $H \cdot gHg^{-1}$ იქნებოდა p^l რიგის ჯგუფი, $l > k$. წინააღმდეგობა.დაგვრჩა, შევნიშნოთ, რომ M სიმრავლის სიმძლავრე ყველა ორბიტის სიგრძეების ჯამის ტოლია. □

5.4. მაგალითი. S_3 ჯგუფს გააჩნია სამი სილოვის 2-ქვეჯგუფი: $\{e, (12)\}$, $\{e, (13)\}$ და $\{e, (23)\}$, მაშინ სრული წინარე სახეები $\varphi : S_4 \to S_3$ ჰომომორფიზმის მიმართ K ბირთვით ტოლია

$$K \cup (12)K, \quad K \cup (13)K, \quad K \cup (23)K$$

და არიან S_4-ში სილოვის 2-ქვეჯგუფები. სილოვის თეორემის თანახმად S_4-ის სილოვის 2-ქვეჯგუფების რიცხვი არ შეიძლება მეტი იყოს სამზე.

5.4. თეორემა. სასრული ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი ციკლურია.

□ ვთქვათ K^* არის სასრული K ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი და $P -$ მისი სილოვის p-ქვეჯგუფი, $|P| = p^k$. ლაგრანჟის თეორემის შედეგის თანახმად P-დან ელემენტების რიგები არიან p^k რიცხვის გამყოფები. P-ში რომ არსებობდეს p^k რიგის ელემენტი, მაშინ ყველა g-სთვის, $g \in P$, შესრულდებოდა $g^{p^{k-1}} = 1$. მაგრამ K ველში $x^{p^{k-1}} = 1$ განტოლებას გააჩნია არაუმეტეს p^{k-1} ფესვისა, ამის გამო P-ში არსებობს p^k რიგის ელემენტი.

ვთქვათ $|K^*| = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ მარტივ რიცხვებად დაშლაა. დამტკიცებულის თანახმად K^*-ში არსებობს $p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ რიგის ელემენტები. მათი ნამრავლის რიგი $|K^*|$-ის ტოლია და მაშასადამე, მათი ნამრავლი წარმოქმნის K^* ჯგუფს. □

§6. ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლები

რამდენიმე $G_1, \cdots, G_n$ ჯგუფიდან შეიძლება ავაგოთ $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ ჯგუფი, რომელიც შედგება $(g_1, \ldots, g_n)$ მიმდევრობებისაგან , სადაც $g_i \in G_i$, $(g_1, \ldots, g_n) \cdot (g_1', \ldots, g_n') = (g_1 g_1', \ldots, g_n g_n')$ გამრავლების ოპერაციით. ამ ჯგუფს $G_1, \cdots, G_n$

ჯგუფების **პირდაპირ ნამრავლს** უწოდებენ. მის ერთეულს წარმოადგენს $(e_1, \ . \ . \ . \ , e_n)$ ელემენტი, სადაც e_i არის G_i ჯგუფის ერთეული.

ვთქვათ $U_i = \{(e_1, . \ . \ . \ , e_{i-1}, g \ , e_{i+1} , \ . \ . \ . \ , \ e_n \mid g \in G_i\}$. მაშინ U_i G ჯგუფის ქვეჯგუფია, რომელიც G_i ჯგუფის იზომორფულია და სრულდება ფორმულები:

$$G = < \bigcup_{i=1}^{n} U_i >$$

(1)

$$U_i \trianglelefteq G$$

(2)

$U_i \cap < \bigcup_{j \neq i} U_j > = \{1\}$ ყველა i-სთვის.

6.1. თეორემა. ვთქვათ G ჯგუფია, $U_1, \ . \ . \ . \ , U_n$ - მისი ისეთი ქვეჯგუფები, რომ სრულდება (3) – (5) ფორმულები. მაშინ G$\cong U_1 \times \ . \ . \ . \times U_n$.

□ ვთქვათ $a \in U_i$, $b \in U_j$, $i \neq j$. მაშინ $a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in U_i \cap U_j$ და მაშასადამე $ab = ba$. (3)-ისა და დამტკიცებული გადანაცვლებადობის გამო, ყოველი $g \in G$ ელემენტი შეიძლება ჩავწეროთ $g = u_1 \dots u_n$ სახით, სადაც $u_i \in U_i$. ეს ჩაწერა ცალსახაა: თუ $g = u_1' \cdots u_n'$, სადაც $u_i' \in U_i$, მაშინ კვლავ გადანაცვლებადობის გამოყენებით მივიღებთ $(u_1')^{-1} u_1 = u_2^{-1} u_2' \cdots u_n^{-1} u_n'$. (5)-ის გამო აქედან გამომდინარეობს, რომ $u_1' = u_1$. ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ $u_i = u_i'$ ყველა $i = 1, \cdots, n$. ეს საშუალებას იძლევა განვმარტოთ ასახვა $\varphi : G \to U_1 \times \ \cdots \times \ U_n$ წესით: $\varphi(g) = (u_1 \dots u_n)$, თუ $g = u_1 \dots u_n$, $u_i \in U_i$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ φ იზომორფიზმია. □

თუ სრულდება ამ თეორემის პირობები, მაშინ ამბობენ, რომ G ჯგუფი იშლება თავისი $U_1, \ . \ . \ . \ , U_n$ ქვეჯგუფების პირდაპირ ჯამად.

6.2. ამოცანა. ნებისმიერი 6 რიგის ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}_6$-ის ან S_3-ის.

ამოხსნა. ვთქვათ G 6 რიგის სასრული ჯგუფია, H - მისი სილოვის 2-ქვეჯგუფი, F - მისი სილოვის 3-ქვეჯგუფი, აშკარაა, რომ F $\trianglelefteq$ G. თუ H $\trianglelefteq$ G, მაშინ G$\cong H \times F \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. თუ H $\ntrianglelefteq$ G, მაშინ $\bigcap_{x \in G} xHx^{-1} = \{1\}$ და კელის თეორემის თანახმად G $\cong S_3$.

6.3. ამოცანა. თუ n, m თანამარტივი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

ამოხსნა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ სასრული ციკლური $< a >$ ჯგუფის r რიგი იშლება ორ თანამარტივ ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლად,

$$r = nm, \quad (n, m) = 1,$$

მაშინ $< a >$ ჯგუფი იშლება ორ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებსაც აქვთ, შესაბამისად, n და m რიგი.

$< a >$ ჯგუფისათვის გამოვიყენებთ ადიციურ ჩაწერას. თუ დავუშვებთ $b = ma$, მაშინ

$$nb = (nm)a = ra = 0,$$

მაგრამ $0 < k < n$-სთვის

$$kb = (km)a \neq 0,$$

ე.ი. ციკლურ $< b >$ ქვეჯგუფს აქვს n რიგი. ანალოგიურად $c = na$ ელემენტის ციკლურ $< c >$ ქვეჯგუფს აქვს m რიგი. $< b > \cap < c >$ თანაკვეთა შეიცავს მხოლოდ ნულს, ვინაიდან $kb = lc$, როცა $0 < k < n, 0 < l < m$, მაშინ

$$(km)a = (\ln)a$$

საიდანაც, ვინაიდან km და $\ln$ რიცხვები ნაკლებია r-ზე,

$$km = \mathrm{l}m,$$

რაც შეუძლებელია n და m რიცხვების თანამარტივობის გამო. ბოლოს, არსებობს ისეთი u და v რიცხვები, რომ

$$nu + mv = 1$$

ამიტომ

$$a = v(ma) + u(na) = vb + uc$$

და მაშასადამე, $< a >$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოიდგინოს როგორც $< b >$ და $< c >$ ქვეჯგუფების ელემენტების ჯამი.

სასრულ ციკლურ ჯგუფს, რომლის რიგი არის მარტივი p რიცხვის რაღაც ხარისხი ეწოდება **პრიმარული ციკლური** ჯგუფი, რომელიც მიეკუთვნება მარტივ p რიცხვს. ამოცანა 6.3-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სასრული ციკლური ჯგუფი იშლება პრიმალურ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ნამრავლად.

6.4. თეორემა. ყოველი სასრულ წარმომქმნელიანი აბელური ჯგუფი იშლება სასრულ რაოდენობა უსასრულო ციკლური ჯგუფებისა და პრიმალურ ციკლური ჯგუფების პირდაპირ

ნამრავლად. უსასრულო ციკლური ჯგუფების რაოდენობა დაპრიმარული ციკლური ჯგუფების რიგების ერთობლივობა ერთი და იგივეა ნებისმიერ ასეთ დაშლაში.

ამ თეორემის დამტკიცება, აგრეთვე ცნობები ნილპოტენტურ და ამოხსნად ჯგუფებზე, რომლებიც აზოგადებს აბელურ ჯგუფებს, არის მაგალითად, წიგნში [??]. ჩვენ არ ვეხებით ამ მნიშვნელოვან თემებს, რადგან ჩვენი მიზანია გავეცნოთ მარტივი სასრული ჯგუფების ზოგიერთ არატრივიალურ მაგალითს.

§7. მარტივი სასრული ჯგუფები

განსაზღვრება. G ჯგუფს ეწოდება **მარტივი**, თუ ის არაერთეულოვანია და მას არ გააჩნია საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფები.

მარტივი ჯგუფის მაგალითია მარტივი რიგის ციკლური ჯგუფი.

მსგავსად იმისა, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს ჯაჭვი

$$1 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k = n,$$

სადაც n_i/n_{i+1} და $n_{i+1}/\, n_i$ მარტივი რიცხვებია, ნებისმიერი G სასრული ჯგუფისათვის არსებობს ჯაჭვი

$$\{1\} = G_0 < G_1 < \cdots < G_k = G,$$

სადაც $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ და $G_{i+1}/\, G_i$ მარტივი ჯგუფია. როცა $\{1\} < G$, ის შეიძლება მივიღოთ $\{1\} < G$ ჯაჭვის მიმდევრობითი გამკვრივებით. გამკვრივების ოპერაცია მდგომარეობს შემდეგში: თუ გვაქვს ჯაჭვი $\{1\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_k = G$ და $H_{i+1}/\, H_i$ არამარტივი ჯგუფია, მაშინ თუ მასში ავიღებთ $H/\, H_i$ საკუთრივ ნორმალურ ქვეჯგუფს, შეიძლება $H_i < H_{i+1}$ ფრაგმენტი შეიცვალოს $H_i < H < H_{i+1}$ ფრაგმენტით.

რიცხვებს და ჯგუფებს შორის შორის ანალოგია ირღვევა იმით, რომ G ჯგუფის აღდგენა $G_{i+1}/\, G_i$ ფაქტორ-ჯგუფების მიხედვით ხდება არაცალსახად. მარტივ მაგალითს იძლევა ორი ჯაჭვი

$$\{1\} < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4 \text{ და } \{e\} < \{e, (12)(34)\} < K,$$

სადაც $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14), (23)\}$ კლაინის ჯგუფია.

ამგვარად, იმისათვის, რომ გავიგოთ სასრული ჯგუფების აგებულება, აუცილებელია არა მარტო ჯგუფების შესწავლა, არამედ აგრეთვე ჯგუფების აწყობის წესი უფრო პატარა

ჯგუფებისაგან. შემდეგი თეორემა სასარგებლოა იმით, რომ იძლევა ინდუქციური მსჯელობის ჩატარების საშუალებას.

7.1. თეორემა. ვთქვათ H არის G სასრული ჯგუფის ჩართვის მიმართ არაერთეულოვანი მინიმალური ქვეჯგუფი. მაშინ $H \cong U_1 \times \cdots \times U_k$, სადაც ყველა ყველა U_i ერთი და იგივე მარტივი ჯგუფის იზომორფულია.

□ დამტკიცება ვაწარმოოთ ინდუქციით G ჯგუფის რიგის მიხედვით. თუ G ჯგუფი მარტივია, მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია. ვთქვათ G არ არის მარტივი. მაშინ $|H| < |G|$. ვთქვათ V არის H ჯგუფის რაიმე მინიმალური ნორმალური ქვეჯგუფი, ინდუქციური დაშვებით V იშლება იზომორფული მარტივი ჯგუფების ნამრავლად. თეორემა

6.1-ის საშუალებით საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ H იშლება V-ს იზომორფული ჯგუფების პირდაპირ ნამრავლად.

ნებისმიერი $g \in G$-თვის გვაქვს $gVG^{-1} \trianglelefteq gVg^{-1} = H.$ ჯგუფი, რომელიც წარმოქმნილია ყველა gVg^{-1} ქვეჯგუფით, ნორმალურია G-ში და იმყოფება H-ში, ამიტომ ის უნდა დაემთხვეს H-ს. ვთქვათ X არის ჩართვის მიმართ G-ს ისეთი მინიმალური ქვესიმრავლე, რომ $H =< xVx^{-1} | x \in X >$. ყოველი $x_0 \in X$ -სთვის თანაკვეთა $x_0Vx_0{}^{-1} \cap < xVx^{-1} | x \in X \ \backslash \{x_0\} >$ ნორმალურია H-ში და მკაცრად ნაკლებია $x_0Vx_0{}^{-1}$-ზე (X-ის მინიმალურობის გამო). რადგან $x_0Vx_0{}^{-1} - H$-ის მინიმალური არაერთეულოვანი ნორმალური ქვეჯგუფია, ამიტომ ეს თანაკვეთა {1}-ის ტოლია. ამის გამო H იშლება xVx^{-1} ჯგუფების პირდაპირ ნამრავლად ყველა $x \in X$-ის მიხედვით. □

§8. A_n მარტივი ჯგუფია, როცა $\mathrm{n} \geq 5$

8.1. ლემა. 1) როცა $\mathrm{n} \geq 3$, A_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა თავისი სამმაგი ციკლით.

2) როცა $\mathrm{n} \geq 5$, A_n ჯგუფი წარმოიქმნება ყველა თავისი $(ij)(kl)$ სახის ჩასმებით.

□ A_n ჯგუფი შედგება S_n-ის ყველა იმ ჩასმისაგან, რომლებიც იშლება ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვის ნამრავლის სახით (შესაძლოა, დამოკიდებულის). დაგვრჩა შევამჩნიოთ, რომ $(ij)(ik) = (ijk) = (ij)(ab)(ab)(ik)$ და $(ij)(kl) = (ijk)(jkl)$. □

8.2. თეორემა (გალუა). ვთქვათ $\mathrm{n} \geq 5$. მაშინ

1) A_n არის S_n ჯგუფის ერთადერთი საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფი.

2) A_n მარტივი ჯგუფია.

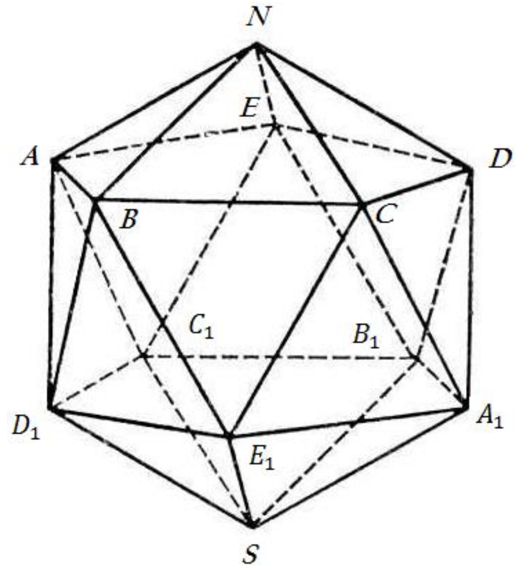
□ 1) ვთქვათ N არის S_n ჯგუფის საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფი და ვთქვათ σ არის N-ის რაღაც არაერთეულოვანი ჩასმა. მაშინ არსებობს ისეთი i, რომ $\sigma\,(i) \neq i$. ამოვირჩიოთ $j \neq i, \sigma\,(i)$. მაშინ $\tau = (ij)$-თვის ჩასმა $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ არაერთეულოვანია და N-ს ეკუთვნის. შემდგომ, ρ არის $\sigma\tau\sigma^{-1}$ და τ ტრანსპოზიციების ნამრავლი და ამიტომ არის ან $(ab)(cd)$ სამმაგი ციკლი, ან სახის ჩასმა (იხ. ლემა 8.1-ის დამტკიცება). რადგან ქვეჯგუფი N ნორმალურია, ამიტომ წინადადება 1.5-ის თანახმად ის შეიცავს ან $(ab)(cd)$ ყველა სამმაგ ციკლს, ან ყველა სახის ჩასმებს და მაშასადამე, $N = A_n$.

2) თეორემა 7.1-ის თანახმად $A_n = U_1 \times \cdots \times U_k$, სადაც ყველა U_i ერთი და იგივე U მარტივი ჯგუფის იზომორფულია. მაშინ $n!/2 = |U|^k$ და ჩებიშევის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $k = 1$ (როცა $m \geq 2$, m-სა და $2m$-ს შორის მოთავსებულია ერთი მაინც მარტივი რიცხვი).

მაგრამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება დავასრულოთ ჩებიშევის თეორემის გარეშეც. რადგან $\mathrm{n} \geq 5$, ამიტომ $|U|$ ლუწია და სილოვის თეორემის თანახმად U_1 ჯგუფი შეიცავს 2 რიგის ρ ელემენტს. ასეთი ρ ყოველთვის იშლება დამოუკიდებელ ტრანსპოზიციატა ნამრავლად: $\rho = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$. მაშინ $\rho = \tau_1\rho{\tau_1}^{-1}$ და მაშასადამე, $\rho \in U_1 \cap \tau_1 \cap {\tau_1}^{-1}$. რადგან U_1 და $\tau_1 U_1 {\tau_1}^{-1}$ ჯგუფები მარტივია, ნორმალურია $A_n = \tau_1 U_1 {\tau_1}^{-1}$-ში მათი თანაკვეთა არაერთეულოვანია, ამიტომ $U_1 = \tau_1 U_1 {\tau_1}^{-1}$. მაშინ U_1 ნორმალურია $< A_n, \tau_1 >= S_n$ ჯგუფში და 1)-დან გამომდინარეობს, რომ $U_1 = A_n$. □

§9. A_5 როგორც იკოსაედრის ბრუნვათა ჯგუფი

ვთქვათ I ფიქსირებული იკოსაედრია სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში, G არის ამ სივრცის ყველა იმ მოძრაობათა ჯგუფი, რომლებიც ინახავს ორიენტაციაც და I გადაყავს I-ში.



G ჯგუფში გვაქვს იგივური მოძრაობა, ბრუნვები $72° \cdot k$-ზე ($k = 1,2,3,4$), ბრუნვები ექვსი ღერძის ირგვლივ, რომლებიც გადიან იკოსაედრის მოპირდაპირე წვეროებზე, ბრუნვები 180°-ზე იმ ღერძების ირგვლივ, რომლებიც გადიან მოპირდაპირე წვეროების შუაზე, და ბრუნვები 120°-ზე და 240°-ზე იმ ღერძების ირგვლივ რომლებიც გადიან მოპირდაპირე წახნაგების ცენტრებზე. ამგვარად, ჩვენ ვიპოვეთ G ჯგუფში 60 მოძრაობა. ვაჩვენოთ, რომ G-ში არ არის მეტი მოძრაობა.

G ჯგუფი ტრანზიტულად მოქმედებს I-ს წვეროების I^0 სიმრავლეზე, რადგან I-დან ნებისმიერი ორი წვერო შეიძლება „შევაერთოთ მეზობელი ჯაჭვით", ხოლო მეზობელი წვეროები შეიძლება გადავიყვანოთ ერთიმეორეში სათანადო ბრუნვით. N წვეროს სტაბილიზატორი ადგილზე ტოვებს აგრეთვე S წვეროს როგორც N-თან ყველაზე უფრო დაშორებულს. ამის გამო ის შედგება NS ღერძის მიმართ ექვსი ბრუნვისაგან იგივურის ჩათვლით. ამგვარად, $|G| = |I^0|$. $St_G(N) = 12 \cdot 5 = 60$ და მაშასადამე, ზემოთ მითითებული ბრუნვები შეადგენენ G ჯგუფს.

G ჯგუფს ეწოდება **იკოსაედრის ბრუნვათა ჯგუფი**. დავამტკიცოთ, რომ $G \cong A_5$. ამისათვის იკოსაედრის 30 წიბო დავყოთ ხუთ ექვსეულად. თითოეული ასეთი ექვსეული შედგება წიბოებისაგან, რომლებიც ერთი მეორეს პარალელურია ან პერპენდიკულარული. მაგალითად, $\{\mathrm{NA},\ SA_1,\ CD,\ C_1D_1,\ BE_1,\ B_1E\}$ ერთ-ერთი ასეთი ექვსეულია. სხვები მთლიანად

განისაზღვრებიან თავიანთი საწყისი NB, NC, ND და NE წიბოებით და ჩვენ მათ არ ამოვწერთ. დავნომროთ ეს ექვსეულები რიცხვებით 1-დან 5-მდე მითითებული დალაგების შესაბამისად. G-დან ბრუნვები გადააწყობს ამ ექვსეულებს როგორც სიმრავლეებს, რადგან მათ იკოსაედრის წიბოები გადაჰყავს წიბოებში და ინარჩუნებენ პარალელურობის და პერპენდიკულარობის თანაფარდობებს. ჩნდება $\varphi : G \to S_5$ ჰომომორფიზმი. NS ღერძის ირგვლივ 72°-ით ბრუნვას სათანადო მიმართულებით შეესავამება (12345) ჩასმა. ბრუნვას 120°-ით სათანადო მიმართულებით იმ ღერძის ირგვლივ, რომელიც (BE_1D_1) (B_1ED) წახნაგების ცენტრებზე გადის, შეესაბამება (123) ჩასმა. ამის გამო $\mathrm{Im}\varphi$ შეიცავს $\mathrm{H} =< (12345), (123) >$ ქვეჯგუფს. დავამტკიცოთ, რომ $H = A_5$. აშკარაა, რომ $H \leq A_5$ და $|H|$ იყოფა 15-ზე, რადგან H შეიცავს 3 და 5 რიგის ელემენტებს. შედეგი 2.4.-ის თანახმად H-ში არსებობს ქვეჯგუფი H_1, რომელიც ნორმალურია A_5-ში და ინდექსით არა უმეტეს 4!-სა. ვინაიდან A_5 მარტივი ჯგუფია, ამიტომ $H_1 = H = A_5$. რადგან $G/Ker\varphi \cong Im\varphi \geq H = A_5$ და $|G| = |A_5|$, ამოტომ $G \cong A_5$.

§10. A_5 როგორც პირველი არაციკლური მარტივი ჯგუფი

10.1. ამოცანა. თუ G 60-ზე ნაკლები რიგის არაციკლური ჯგუფია, მაშინ G არ არის მარტივი.

ამოხსნა. სილოვის თეორემის თანახმად და იმის გამო, რომ სასრული p-ჯგუფის ცენტრი არაერთეულოვანია, შეიძლება გამოვრიცხოთის ჯგუფები, რომლებსაც გააჩნიათ ერთადერთი სილოვის p-ქვეჯგუფი რომელიღაც p-სთვის (ასეთი ქვეჯგუფი ნორმალურია).სილოვის თეორემისა და შედეგი 2.4-ის გამო გამოირიცხება აგრეთვე 12, 24, 26 და 38 რიგის ჯგუფები. რჩება 30 და 56 რიგის ჯგუფები.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|G| =$56. ვივარაუდოთ, რომ G-ში არის არა ერთი, არამედ 8 სილოვის 7-ქვეჯგუფი. რადგან ისინი წყვილ-წყვილად თანაიკვეთება 1-ით, ამიტომ მათში ელემენტთა საერთო რიცხვი 1+8(7-1)=49-ის ტოლია. კიდევ 7 ელემენტი, რომლებიც ერთეულთან ერთად ქმნიან ერთადერთ სილოვის 2-ქვეჯგუფს.

შემთხვევა, როცა $|G| =$30, განიხილება ანალოგიურად, მაგრამ ჩვენ მოვიყვანთ სხვა დამტკიცებას. G ჯგუფი გავაიგივოთ მის ანასახთან მისი რეგულარული წარმოდგენისას S_{30}-ში. ჰომომორფიზმი G-დან $\{\pm 1\}$ ჯგუფში, რომელიც ლუწ ჩასმებს შეუსაბამებს 1-ს, ხოლო კენტ

ჩასმებს კი -1-ს, არის ეპიმორფიზმი, რადგან G-ში არსებული 2 რიგის ელემენტი არის 15 დამოუკიდებელი ტრანსპოზიციის ნამრავლი (შედეგი 2.4, დებულება 1) და მაშასადამე, კენტია. ამიტომ ამ ჰომომორფიზმის ბირთვის ინდექსი G-ში 2-ის ტოლია და G არ არის მარტივი.

10.2. თეორემა. თუ G 60 რიგის მარტივი ჯგუფია, მაშინ $G \cong A_5$.

□ სილოვის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ G-ს გააჩნია ზუსტად ექვსი სილოვის 5-ქვეჯგუფი. ისინი აღვნიშნოთ H_i-ით, $i = 1, \cdots, 6$. G-ში $N_G(\, H_i)$-ის ინდექსი ტოლია H_i-სთან შეუღლებულ ქვეჯგუფთა რიცხვს , ე.ი. 6-ის და მაშასადამე, $|N_G(\, H_i)| = 10$. ვთქვათ $H_1 = < a >$ და ვთქვათ $< b >$ არის G -ში რომელიღაც სილოვის 3-ქვეჯგუფი. $< a, b >$ ჯგუფის რიგი იყოფა 15-ზე და ამგვარად ის G-ს ემთხვევა (სხვანაირად, შედეგი 2.4-ის თანახმად G-ში იქნებოდა საკუთრივი ნორმალური ქვეჯგუფი). განვიხილოთ G ჯგუფის შეუღლებით მოქმედება მისი სილოვის 5-ქვეჯგუფების სიმრავლეზე. b ელემენტი არ ახდენს არც ერთი H_i-ის სტაბილიზებას, რადგან $N_G(\, H_i)$-ში არ არის 3 რიგის ელემენტები. ამიტომ b ანაცვლებს ციკლების მიხედვით ზოგიერთ სამ სილოვი 5-ქვეჯგუფს და ანაცვლებს დარჩენილ სამს ციკლის მიხედვით. b-ს მოქმედება გამოისახება $\bar{b} = (123)(***)$ჩასმით. კერძოდ, $\bar{a}$ სიმბოლო 1-ს ადგილზე ტოვებს და $\bar{a}$-ს რომელიღაც ხარისხს 2 გადაყავს 3-ში. ამიტომ, თუ a წარმომქმნელს მისი ხარისხით შევცვლით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\bar{a} = (23ijk)$. თუ ხელახლა აღნიშვნას მოვახდენთ, შეიძლება ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ $i = 4, j = 5, k = 6$. მეორე ციკლისათვის $\bar{b}$-ში გვაქვს სულ ორი შესაძლებლობა: $(***) = (456)$ და $(***) = (465)$. პირველს მივყავართ იმისკენ, რომ $\overline{a^{-1}b} = (163)$. კერძოდ, $a^{-1}b$ ელემენტი შეუღლებისას H_2 ქვეჯგუფს ადგილზე ტოვებს. მაგრამ $N_G(\, H_2)$-ში არ არის 3 რიგის ელემენტები. ამის გამო ხდება მეორე შესაძლებლობის რეალიზება.

ამგვარად, ჩნდება G-დან S_6-ში ჰომომორფიზმი მოცემული წესით წარმომქმნელებზე: $A \mapsto (23456), b \mapsto (123)(456)$. რადგან G ჯგუფი მარტივია, ამიტომ ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი ერთეულოვანია და მაშასადამე, $G \cong < (23456), (123)(465) >$. კერძოდ, G იზომორფიზმამდე სიზუსტით ერთადერთია. მეორე მხრივ, $|A_5| = 60$ და A_5 მარტივია. ამიტომ $G \cong A_5$. □

9.3. დავნომროთ იკოსაედრის დიამეტრები 1-დან 6-მდე რიცხვებით. ვიპოვოთ მისი ისეთი a და b ბრუნვები, რომლებიც ისე გადაალაგებს მის დიამეტრებს, როგორც თეორემის

დამტკიცებაშია მოყვანილი. აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $<(23456),(123)(465)> \cong A_5$.

§11. A_5 როგორც პროექციული სპეციალური წრფივი ჯგუფი

განსაზღვრება. K ველის მიმართ **პროექციული სპეციალური წრფივი ჯგუფი** $PSL_n(K)$ ეწოდება $SL_n(K)$ ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფს მისი ცენტრის მიმართ.

ანალოგიურად განიმარტება $PGL_n(K)$ ჯგუფი. შევთანხმდეთ, რომ თუ K ველი სასრულია და q ელემენტისაგან შედგება, მაშინ $SL_n(K)$-ს ნაცვლად ჩვენ ვწერთ $SL_n(q)$ და ა.შ.

რადგანაც $SL_n(q)$ ჯგუფის ცენტრი შედგება ყველა სკალარული მატრიცისაგან 1-ის ტოლი დეტერმინანტით, ამიტომ მისი d რიგი ტოლია ისეთი a ელემენტების რაოდენობის ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფიდან, რომ $a^n = 1$. თეორემა 6.5-ის თანახმად სასრული ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი ციკლურია. ამიტომ $d = (q-1, n)$ (2) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|PSL_n(q)| = \frac{1}{d(q-1)} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$$

ამოცანა 11.1. $PSL_2(5) \cong PSL_2(4) \cong A_5$.

ამოხსნა. 1) ვთქვათ V არის 2 სიმაღლის სვეტების ვექტორული სივრცე F_s-ის მიმართ, F_s არის ნაშთთა კლასების ველი მოდულით 5. ყოველი არანულოვანი ვექტორი V-დან პროპორციულია ერთ-ერთის შემდეგი ვექტორებისაგან:

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},$$

ხოლო თვითონ ეს ვექტორები წყვილ-წყვილად არაპროპორციულია. ამის გამო, V შეიცავს ზუსტად ექვს წრფეს, რომლებიც გადიან ნულოვან ვექტორზე. $SL_2(5)$ ჯგუფი ამ წრფეთა სიმრავლეზე შემდეგი წესით მოქმედებს: $\{kv | k \in F_s\}$ წრფე, $0 \neq v \in \mathrm{V}$, გადადის $A \in SL_2(5)$ მატრიცის მოქმედებით $\{kAv | k \in F_s\}$ წრფეში . სკალარული მატრიცევი და მხოლოდ ისინი ადგილზე ტოვებენ ყოველ წრფეს. ამიტომ ჯგუფი ზუსტად $PSL_2(5)$ მოქმედებს ამ წრფეთა სიმრავლეზე. $PSL_2(5)$ ჯგუფში გვაქვს $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ელემენტები, რომლებიც არიან $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

და $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცების ანასახები. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წრფეთა სათანადო ნუმერაციის შედეგად $\bar{A}$ მათზე მოქმედებს როგორც (23456) ჩასმა, ხოლო $\bar{B}$ − როგორც $(123)(465)$ ჩასმა. ჩნდება $PSL_2(5)$ ჯგუფის $< \bar{A}\ ,\ \bar{B} >$ ქვეჯგუფის ჰომომორფიზმი $< (23456), (123)(465) > \cong A_5$. ჯგუფზე (იხ. 10.3). რადგან $|PSL_2(5)| = 60 = |A_5|$, ამიტომ ეს ჰომომორფიზმი არის იზომორფიზმი და $< \bar{A}\ , \bar{B} > = PSL_2(5) \cong A_5$.

2) ვთქვათ V არის 2 სიმაღლის სვეტების ვექტორული სივრცე $F_4\,\{0,1,x,y\}$ ველის მიმართ. V სივრცე შეიცავს ზუსტად ხუთ წრფეს, რომლებიც გადიან ნულოვან ვექტორზე. მათ გააჩნიათ მიმმართველი ვექტორები

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

როგორც ზემოთ, $PSL_2(4)$ ჯგუფი ზუსტად მოქმედებს ამ წრფეთა სიმრავლეზე. $PSL_2(4)$ ჯგუფში გვაქვს $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ელემენტები, რომლებიც არიან $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & 0 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცების ანასახები. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წრფეთა სათანადო ნუმერაციის შედეგად $\bar{A}$ მათზე მოქმედებს როგორც (12345) ჩასმა. ხოლო $\bar{B}$ − როგორც (123) ჩასმა. დაგვრჩა გავიხსენოთ (იხ. §9), რომ $< (12345), (123) > = A_5$ და დავასრულოთ დამტკიცება 1)-ის მსგავსად.

§12. ჟორდან-დიქსონის თეორემა

12.1. სიმარტივის კრიტერიუმი. ვთქვათ, G ჯგუფი ზუსტად და 2-ტრანზიტულად მოქმედებს X სიმრავლეზე. მაშინ G მარტივია, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) G ემთხვევა თავის G' კომუტანტს,

2) რომელიღაც $x \in \mathrm{X}$ ელემენტის $St(x)$ სტაბილიზატორში იმყოფება ისეთი A ქვეჯგუფი, რომ

ა) A აბელურია,

ბ) $A \trianglelefteq St(x)$,

გ) $G = < gAg^{-1} |\ g \in \mathrm{G} >$.

□ ვთქვათ N არის G ჯგუფის არაერთეულოვანი ნორმალური ქვეჯგუფი. N ჯგუფი ტრანზიტულად მოქმედებს X-ზე და ამგვარად, $G = N \cdot St(x)$. დავამტკიცოთ, რომ $G = NA$. გ)-ს თანახმად G-ს ყოველი g ელემენტი ჩაიწერება $g = g_1 a_1 {g_1}^{-1} \cdots g_k a_k {g_k}^{-1}$ სახით, სადაც $a_i \in \mathrm{A}, g_i \in \mathrm{G}$. დამტკიცებულის თანახმად ყოველი g_i ელემენტი ჩაიწერება $g_i = n_i s_i$ სახით, სადაც $n_i \in N$, $s_i \in St(x)$. მაშინ g ელემენტის ანასახი N-ის მიმართ ფაქტორიზაციის დროს ემთხვევა $a = s_1 a_1 {s_1}^{-1} \cdots s_k a_k {s_k}^{-1}$ ელემენტის ანასახს. ბ)-ს ძალით გვაქვს $a \in A$ და მაშასადამე, $g \in Na \subseteq NA$. ბოლოს $G = G' = (NA)' \leq N$, რადგან N-ის მიმართ ფაქტორიზაციის შედეგად ნებისმიერი $[n_1 a_1, n_2 a_2]$, სადაც $n_i \in N$, $a_i \in \mathrm{A}$, კომუტატორის ანასახი $[a_1, a_2]$ კომუტატორის ანასახის, ე. ი. 1-ის ტოლია, A-ს აბელურობის გამო. □

12.2. თეორემა (ჟორდან-დიქსონი). ვთქვათ K ველია, $n \geq 2$. $PSL_n(K)$ ჯგუფი მარტივია ორი შემთხვევის გარდა $PSL_2(2)$ და $PSL_2(3)$.

□ ვთქვათ V არის n სიმაღლის სვეტების ვექტორული სივრცე K ველის მიმართ $e_1, \cdots, e_n$ სტანდარტული ბაზისით. ვთქვათ X არის სივრცის ყველა იმ წრფეთა სიმრავლე, რომლებიც გადიან 0-ზე. $0 \neq v \in V$-სთვის $\bar{v}$-ით აღვნიშნოთ წრფე X-დან მიმმართველი v ვექტორით. $\bar{M}$-ით აღვნიშნოთ $M \in SL_n(K)$ მატრიცის ანასახი $G = PSL_n(K)$ ჯგუფში. განვიხილოთ G ჯგუფის X სიმრავლეზე მოქმედება წესით $\bar{M}\bar{v} = \overline{Mv}$ და დავამტკიცოთ, რომ ეს მოქმედება აკმაყოფილებს მარტივობის კრიტერიუმების პირობებს.

დავუშვათ, რომ $\bar{M}$ სტაბილიზებს ყველა წრფეს X-დან. მაშინ $Me_i = \lambda_i e_i$ და $M(e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(e_1 + \cdots + e_n)$ რომელიღაც λ_i და λ-სთვის K-დან. წრფივობის გამოყენებით აქედან ვღებულობთ, რომ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. ამის გამო M სკალარული მატრიცია და $\bar{M} = 1$. ამრიგად, G-ს მოქმედება X ზუსტია. ეს მოქმედება 2-ტრანზიტულია, რადგან $\overline{e_1}$ და $\overline{e_2}$ წრფეები შეიძლება გადავიყვანოთ ნებისმიერ ორ $\overline{v_1}$ და $\overline{v_2}$ წრფეში $\bar{M}$ ელემენტით, სადაც M ისეთი მატრიცია $SL_n(K)$-დან, რომლის პირველი და მეორე სვეტი v_1-ის და v_2-ის პროპორციულია.

დავამტკიცოთ, რომ $(PSL_n(K))' = PSL(K)$. რადგან $N \trianglelefteq H$ და $H = H'$-დან გამომდინარეობს, რომ $(H/N)' = H/N$, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $(SL_n(K))' = SL_n(K)$. როცა $n \geq 3$, ეს გამომდინარეობს სავარჯიშო 12.3-ის 1) და 2) პუნქტებიდან, ხოლო როცა $n = 2$ - 1) და 3) პუნქტებიდან იმის გათვალისწინებით, რომ როცა $|K| > 2, SL_2(K)$-ში არსებობს არასკალარული დიაგონალური მატრიცი.

ვთქვათ, x წრფეა მიმმართველი e_n ვექტორით. მისი $St(x)$ სტაბილიზატორი G ჯგუფში შედგება ყველა ისეთი $\bar{B}$-სგან, რომ Be_n სვეტი e_n სვეტის პროპორციულია, ე.ი. $St(x) = \{\bar{B} | B_{1,n} = \cdots = B_{n-1,n} = 0\}$. ვთქვათ A $St(x)$ ჯგუფის ქვეჯგუფია, რომელიც შედგება ყველა ისეთი $\bar{B}$-სგან, რომ B განსხვავდება ერთეულოვანი მატრიცისაგან მხოლოდ ელემენტებით, რომლებიც $(1,n), \cdots, (n, n-1)$ ადგილებზე დგანან. ადვილი შესამოწმებელია, რომ A აბელური ჯგუფია და $A \trianglelefteq St(x)$. ტოლობა $PSL_n(K) =< gAg^{-1} |\, g \in PSL_n(K) >$ გამომდინარეობს იქიდან, რომ სავარჯიშო 12.3-ის 1) და 4) პუნქტებიდან $t_{ni}(\alpha)$ ტრანსვექციების ანასახები იმყოფებიან A-ში. □

12.3. სავარჯიშო. 1) $SL_n(K)$ ჯგუფი წარმოიქმნება თავისი $t_{ij}(\alpha)$ ტრანსვექციით.

2) $[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$ განსხვავებული i, j, k-სთვის.

3) $\left[t_{ij}(\alpha), d\right] = [t_{ij}\left(\alpha\left(1 - \frac{d_j}{d_j}\right)\right)$, სადაც d-დიაგონალური მატრიცია $GL_n(K)$-დან $d_1, \cdots, d_n$ ელემენტებით მთავარ დიაგონალზე.

4) $M_\sigma t_{ij}(\alpha) {M_\sigma}^{-1} = t_{\sigma(i)\sigma(j)}(\alpha)$, სადაც $\sigma \in S_n$ და M_σ მატრიცია, რომლის $(\sigma(1), 1), \cdots, (\sigma(n), n)$ ადგილებზე დგას 1, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე - 0.

12.4. შენიშვნები. 1) $PSL_n(q)$ ჯგუფები, როცა $n \geq 2$, q მარტივია და $(n, q) \neq (2,2), (2,3)$, შედიან ლის ტიპის სასრული მარტივი ჯგუფების სერიაში. ყველა ისინი, გარდა სასრული რაოდენობისა, არ არიან ნიშანცვლადი ჯგუფების იზომორფულნი. ეს გამომდინარეობს მათი რიგების შედარებიდან. მაგალითად, $|PSL_2(7)| = 168 \neq |A_m|$ არც ერთი m-სთვის. აღვნიშნოთ შემდეგი მოულოდნელი იზომორფიზმები:

$$PSL_2(4) \cong PSL_2(5) \cong A_5, PSL_2(7) \cong PSL_3(2),$$

$$PSL_2(9) \cong A_6, PSL_4(2) \cong A_8.$$

მარტივ A_8 და $PSL_3(4)$ ჯგუფებს ტოლი რიგი აქვთ, მაგრამ არ არის იზომორფულნი. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ A_8-ში არის 15 რიგის ელემენტი (მაგალითად, (12345)(678)), ხოლო $PSL_3(4)$-ში ასეთი ელემენტი არ არის. მართლაც, ვთქვათ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, სადაც ოთხ ელემენტიანი ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფის წარმომქმნელია. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\bar{A} \in PSL_3(4)$ ელემენტს აქვს 5-ის ტოლი რიგი და მისი ცენტრალიზატორი $< \bar{A} >$-ს ემთხვევა. უკანასკნელი დაიყვანება იმის შემოწმებაზე, რომ

$BA = ABZ$ ტოლობიდან, სადაც $B \in SL_3(4), Z$ სკალარული მატრიცია $SL_3(4)$-დან, გამომდინარეობს, რომ $B \in <\mathrm{A}>$.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $PSL_3(4)$ უდიდესი ჯგუფია $PSL_n(q)$ ჯგუფთა სერიიდან, რომლის რიგი ემთხვევა ჯგუფის რიგს A_m ჯგუფთა სერიიდან.

2) თურმე ყველა არაციკლურ მარტივ ჯგუფს, რომლის რიგი არ აღემატება 1000, აქვს რიგები 60, 168, 360, 504 და 660 და იზომორფულია $PSL_2(q)$, როცა $q = 4$ და 5 (ეს დამტკიცებულია §9-ში და §10-ში), 7, 9, 8 და 11 შესაბამისად.

ლიტერატურა

1. Винберг Э.Б. Курс Алгебры. М.: Факториал, 2002.

2. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в трех частях). М.: Физматлит, 2001.

4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. 4-е изд. М.: Физматлит, 1996.

5. Холл М. Теории групп. М.: ИЛ, 1962.

6. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. Москва, Ижевск, 2001.

7. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

ა მ ო ც ა ნ ე ბ ი

1) ნებისმიერი 4 რიგის ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}_4$ ჯგუფის ან

$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ჯგუფის.

2) ნებისმიერი 6 რიგის ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}_6$-ის ან S_3-ის.

3) თუ n, m თანამარტივი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $\mathbb{Z}_{nm} \subseteq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

4) თუ G 60-ზე ნაკლები რიგის არაციკლური ჯგუფია, მაშინ G არ არის მარტივი.

5) $PSL_2(5) \cong PSL_2(4) \cong A_5$.